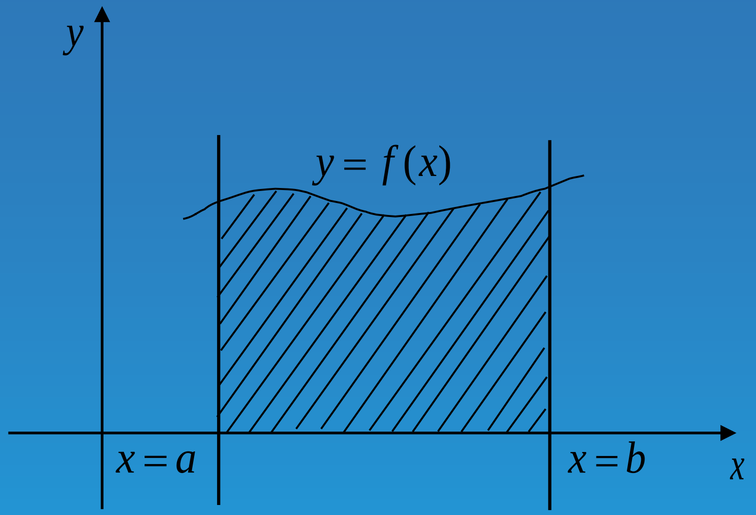
$$\int \ldots dt$$

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

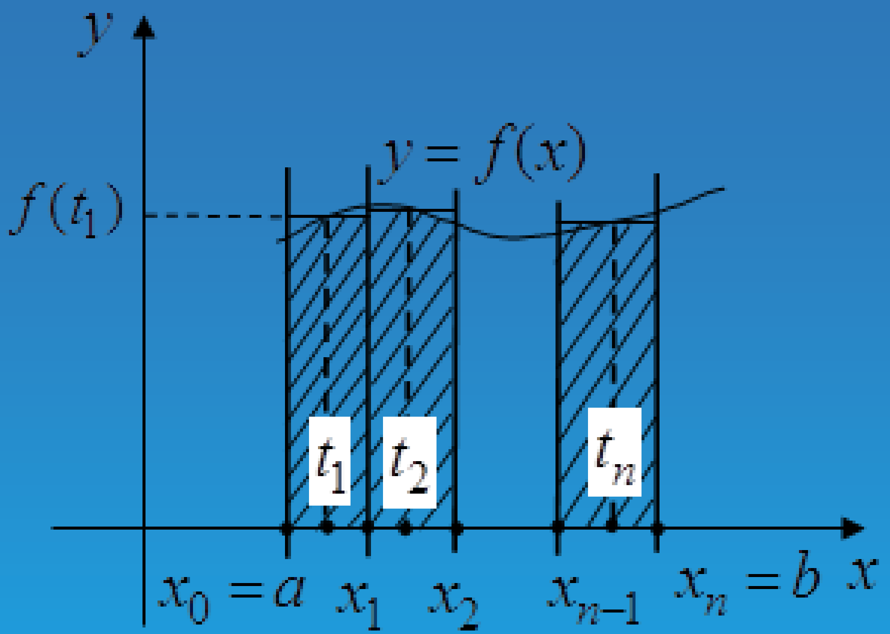
$$\int_0^a x^2\, dx$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Задача о площади криволинейной трапеции.



Найдем площадь криволинейной трапеции.
Разобьем трапецию на части прямыми проходящими параллельно оси Оу



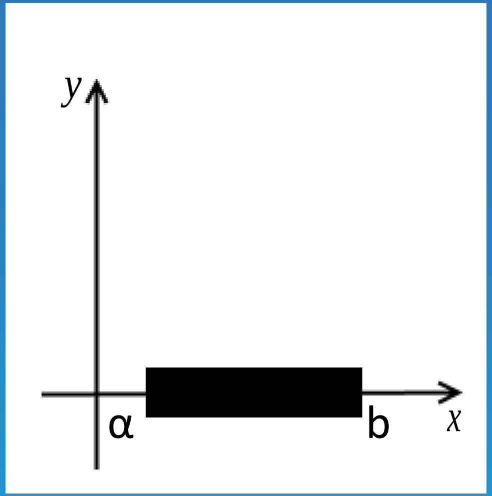
Из рисунка видно, что

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

Точное значение площади получим, если построенное разбиение неограниченно измельчать:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \qquad \lambda = наиб\left(\Delta x_k\right)$$

Задача о массе прямолинейного стержня.



Пусть прямолинейный стержень расположен на отрезке $[\alpha, \mathrm{b}]$ на оси Ox и известна плотность распределения масс $\rho(\mathrm{x})$в каждой точке $\chi \in [\alpha, \mathrm{b}]$. Требуется найти массу стрежня.

Разобьем стержень на столь малые элементарные части. Тогда приближенное значение массы стержня

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(t_k)\Delta x_k \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Точное значение массы получим, если разбиение стрежня на элементарные части неограниченно измельчать:

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(t_k)\Delta x_k \qquad \lambda = наиб\left(\Delta x_k\right)$$

Понятие определенного интеграла.

Сумма вида $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

называется ***интегральной суммой*** на отрезке $[\alpha, \mathrm{b}]$ для функции $f(x)$

Определение. Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ при $\lambda = \max_k \Delta x_k \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части Δx_k ,ни от выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$,то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[\alpha, \mathrm{b}]$,а сам предел называется *определенным интегралом Римана* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx .$$

Таким образом, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4. $\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\,dx = k_1\int_a^b f_1(x)\,dx + k_2\int_a^b f_2(x)\,dx$

5. Если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

6. Если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

7. Если $f_1(x) \geq f_2(x) \quad \forall x \in [a;b]$,то $\int\limits_a^b f_1(x)\,dx \geq \int\limits_a^b f_2(x)\,dx$

8. $\exists \xi \in [a;b]$ такое, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(\xi)$

9. $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$

10. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и $a \leq b$,то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

11. Если $(a \le b)$, то

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Если a и b произвольные числа, то

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|$$