Лекция 21.

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

21.1. Интегрирование рациональных дробей и некоторых иррациональных выражений (продолжение)

Приведем метод интегрирования рациональной дроби

Если дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – неправильная, т.е. $m \ge n$,

то сначала выделяют целую часть, т.е. представляют ее в

виде $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$, где $M_{m-n}(x)$

– многочлен степени $m-n$, а $\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$ – правильная дробь.

Выделение целой части производят с помощью деления $P_m(x)$ на $Q_n(x)$ "уголком". Затем разлагают знаменатель полученной правильной дроби $\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$ на простейшие множители с действительными коэффициентами

$$Q_n(x) = Q_n(x-a_1)^{l_1} \ldots (x-a_r)^{l_r} \cdot \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\nu_1} \ldots \left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\nu_s} \qquad (20.1)$$

Теорема. Пусть знаменатель правильной рациональной дроби разложен по формуле (20.1) с действительными коэффициентами. Тогда правильную дробь $\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$ можно представить и притом единственным образом в виде суммы простейших дробей типа I, II, III, IV по следующему правилу:

а) каждому действительному корню a_i кратности l_i соответствует сумма l_i дробей:

$$\frac{A_1}{x-a_i}+\frac{A_2}{\left(x-a_i\right)^2}+\frac{A_3}{\left(x-a_i\right)^3}+\ldots+\frac{A_{l_i}}{\left(x-a_i\right)^{l_i}};$$

б) каждому множителю вида $\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{\nu_i}$

соответствует сумма ν_i дробей:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_ix+q_i}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+p_ix+q_i\right)^2}+\frac{B_3x+C_3}{\left(x^2+p_ix+q_i\right)^3}+\ldots+\frac{B_{\nu_i}x+C_{\nu_i}}{\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{\nu_i}}.$$

Методы определения коэффициентов продемонстрируем на примере.

Найти интеграл $I=\int\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx.$

◁Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Все корни знаменателя действительные и простые, поэтому подынтегральная функция представится в виде суммы трех простейших дробей вида

$$\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}+\frac{D}{x-1},$$

где – A, B, D коэффициенты, подлежащие определению. Приводя дроби к общему знаменателю и отбрасывая его, получим тождество

$$15x^2-4x-81=A(x+4)(x-1)+B(x-3)(x-1)+D(x-3)(x+4) \quad (*)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, получим систему уравнений для определения коэффициентов

$$\begin{cases} A+B+D=15, \\ 3A-4B+D=-4, \\ -4A+3B-12D=-81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2A+5B=19, \\ 8A+15B=99 \end{cases} \Rightarrow B=5, \quad A=3, \quad D=7.$$

Следовательно,

$$I=3\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{x+4}+7\int\frac{dx}{x-1}=3\ln|x-3|+5\ln|x+4|+7\ln|x-1|+C=$$

$$=\ln\left|(x-3)^3(x+4)^5(x-1)^7\right|+C.$$

Тождество (*) справедливо при любом значении x, поэтому, задав три каких-нибудь частных значения, получим три уравнения для определения трех неопределенных коэффициентов A, B и D . Удобнее всего в качестве значений выбирать корни знаменателя подынтегральной функции, так как они обращают в нуль часть сомножителей.

Полагая в тождестве (*) последовательно $x=3, x=-4$ и $x=1$

Получим A=3, B=5 и D=7. $\triangleright$

Замечание 2. Некоторые типы интегралов от алгебраических иррациональностей надлежащей заменой переменной могут быть сведены к интегралам от рациональных функций: такое преобразование интеграла принято называть его рационализацией.

Например, интегралы вида

$$\int R\left(x,\ x^{\frac{m_1}{n_1}},\ x^{\frac{m_2}{n_2}}, ...,\ x^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx$$

где R – рациональная функция, $m_1, m_2, ..., m_k, n_1, n_2, ..., n_k$

– целые числа, причем , $n_i \neq 0,\ i=1,2,...,k$

преобразуются в интегралы от рациональных дробей с помощью подстановки , где $t=\sqrt[n]{x}$ – наименьшее общее кратное знаменателей $n_1, n_2, ..., n_k$.

21.2. Интегрирование тригонометрических функций

При интегрировании рациональных функций от синуса и косинуса одного аргумента применяют универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t.$ При этом, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x=2\operatorname{arctg} t$, $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$ и интеграл сводится к интегралу от рациональной функции переменной t.

Однако универсальная подстановка нередко приводит к интегрированию сложных рациональных дробей. Перечислим некоторые частные случаи интегралов от тригонометрических функций, для интегрирования которых удобнее применять другие подстановки.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$, где R рациональная функция, удовлетворяющая условию

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

подстановкой $\cos x = t$ сводится к интегралу от рациональной функции переменной t.

Утверждение 2. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R - рациональная функция, удовлетворяющая условию

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

подстановкой $\sin x = t$ сводится к интегралу от рациональной функции переменной t.

Утверждение 3. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R- рациональная функция, удовлетворяющая условию

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ сводится к интегралу от рациональной функции переменной t.

При этом $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

Утверждение 4. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$ легко находятся с использованием формул:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right)$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right)$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)$$