Лекция 20.

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

20.1. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

- Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае "удачной" подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)\,dx$. Сделаем подстановку $x=\varphi(t)$,

где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx=\varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования получаем формулу интегрирования подстановкой

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\ .$$

Эта формула называется также формулой замены переменной в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла в правой части этого равенства следует перейти от новой переменной

t к переменной x .

Иногда целесообразно подбирать подстановку

$t=\varphi(x)$ в виде $t=\varphi(x)$, тогда $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$

где $t=\varphi(x)$.

20.2. Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям служит для интегрирования некоторых произведений и осуществляется по формуле $\int u\,dv = uv - \int v\,du$,

где $u(x)$, $v(x)$, – непрерывно дифференцируемые функции.

Докажем эту формулу.

$$d(uv) = udv + vdu \qquad udv = d(uv) - vdu$$

$$\int u\,dv = \int [d(uv) - vdu] + C = uv - \int vdu + C.$$

При применении метода интегрирования по частям подынтегральное выражение данного интеграла разбивают на два множителя u и dv, из которых затем находят соответственно du (дифференцированием) и v (интегрированием)
и применяют указанную формулу, сводя вычисление интеграла $\int u\,dv$
к вычислению интеграла $\int v\,du$.

Причем этот метод целесообразно применять тогда, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

В общем случае правила разбиения на множители дать нельзя. Однако о некоторых типах интегралов, вычисляемых по частям, можно дать следующие рекомендации:

В интегралах: $\int P_n(x)\sin\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\,e^{\alpha x}\,dx$ в качестве u берут многочлен $P_n(x)$, а остальное принимают за dv .

20.1. Интегрирование рациональных дробей и некоторых иррациональных выражений

- Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены соответственно степени m и n . Рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется правильной, если $m < n$

Простейшими рациональными дробями являются дроби вида: I. $\frac{A}{x-a}$,II. $\frac{A}{(x-a)^k}$,
III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$,

Где $k > 1$ – целое число; a, A, B, p, q – действительные числа; квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ – не имеет действительных корней, т.е $p^2 - 4q < 0.$

Дроби I и II интегрируются простейшими методами:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\, d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{1-k} + C$$

$$k \neq 1$$

ДРОБИ III и IV ИНТЕГРИРУЮТСЯ СЛЕДУЮЩИМ ОБРАЗОМ.

1) СНАЧАЛА ВЫДЕЛЯЕТСЯ ПОЛНЫЙ КВАДРАТ В КВАДРАТНОМ ТРЁХЧЛЕНЕ:

$$x^2 + px + q$$

2) ПОСЛЕ ЭТОГО ПРОИЗВОДИТСЯ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ:

$$x + \frac{p}{2} = t.$$

3) ЗАТЕМ ИНТЕГРАЛЫ ПРИВОДЯТСЯ К ТАБЛИЧНЫМ ИНТЕГРАЛАМ.