Лекция 19.

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

19.1. Основные понятия и формулы

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если $F'(x) = f(x)$ $(dF(x) = f(x)dx)$ для любого $x \in X$

Любая непрерывная на X функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных, различающихся между собой постоянным слагаемым, т.е. $\Phi(x) = F(x) + C$ (19.1).

Теорема. Пусть $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке. Тогда формула (19.1), где C — произвольная постоянная, дает все первообразные для $f(x)$ в этом промежутке.

Определение. Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от этой функции, а операция нахождения первообразных – ***интегрированием*** функции $f(x)\,dx$

Операция интегрирования является обратной к операции дифференцирования и обозначается $\int f(x)\,dx$

Итак, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

При этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением.

Замечание. Для того, чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Например, $\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$, т.к. $\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)' = e^{2x}$

19.2. Основные свойства неопределенного интеграла

Предположим, что $f(x)$, $u(x)$ – произвольные дифференцируемые функции в некотором промежутке с непрерывной производной. Тогда справедливы следующие ***свойства*** неопределенного интеграла, вытекающие из его определения.

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ или $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

2. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ или $\int d\,f(x) = f(x) + C$

3. $\int (\alpha\, f_1(x) \pm \beta\, f_2(x))\,dx = \alpha\int f_1(x)\,dx \pm \beta\int f_2(x)\,dx$, где α, β – const.

4. Инвариантность формул интегрирования:

если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$,

где $u = u(x)$ – некоторая дифференцируемая функция с непрерывной производной.

19.3. Основные табличные интегралы

Если $u = u(x)$ – некоторая дифференцируемая функция с непрерывной производной, то:

$$\int du = u + C$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1.$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \quad (u \neq 0)$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad (a > 0, \quad a \neq 1).$$

$$\int e^u du = e^u + C.$$

$$\int \cos u \, du = \sin u + C.$$

$$\int \sin u \, du = -\cos u + C.$$

19.3. Основные табличные интегралы

Продолжение таблицы:

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\,u + C, \quad \left(u \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \;\; k \in Z\right).$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\, ctg\,u + C, \quad (u \neq \pi k, \;\; k \in Z).$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left| tg\frac{u}{2} \right| + C, \quad (u \neq \pi k, \;\; k \in Z).$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left| tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C, \quad \left(u \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \;\; k \in Z\right).$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\; arctg\frac{u}{a} + C, \quad (a \neq 0).$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\;\ln\left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C, \quad (|u| \neq |a|, \;\; a \neq 0).$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C, \quad (|a| > |u|).$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a}\right| + C, \quad \left(u^2 > -a\right)$$

$$\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C.$$

$$\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C.$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C, \quad (u \neq 0).$$

Замечание. Операция дифференцирования элементарных функций снова приводит к элементарным функциям, а операция интегрирования уже может привести к неэлементарным функциям, т.е. функциям, которые не выражаются через конечное число арифметических операций и суперпозиций элементарных функций.

Например, $\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона, $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм, $\int \cos x^2\, dx$, $\int \sin x^2\, dx$ – интегралы Френеля, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x}dx$ – интегральный косинус.

Приведенные интегралы хотя и существуют, но не являются элементарными функциями. Такие интегралы принято называть "неберущимися".

19.4. Простейшие методы интегрирования

Под непосредственным интегрированием понимают приведение данного интеграла к табличному с использованием тождественных преобразований подынтегрального выражения, свойств неопределенного интеграла и простейших подстановок (замена переменной) типа

При сведении интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция "подведения под знак дифференциала") $du = d(u \pm a)$;

$du = \frac{1}{a} d(au) = \frac{1}{a} d(au + b)$, $a, b -$ числа, $a \neq 0$, $u\,du = \frac{1}{2} d(u^2)$, $\cos u\,du = d(\sin u)$,

$\sin u\,du = -\,d(\cos u)$, $\frac{1}{u} du = d(\ln u)$; $\frac{du}{\cos^2 u} = d(\operatorname{tg} u)$, $\frac{du}{\sin^2 u} = -d(\operatorname{ctg} u)$.

Вообще, $f'(u)\,du = d(f(u))$ – дифференциал функции - часто используется при интегрировании.

Например, $\int x\cos(x^2+3)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2+3)\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2+3)\,d(x^2+3) = \frac{1}{2}\sin(x^2+3) + C$

здесь мы учли, что $d(x^2+3) = 2x\,dx$, использовали табличный интеграл 7 и инвариантность формул интегрирования (свойство 4).