1. Двумерная дискретная случайная величина (X,Y) задана законом распределения вероятностей:

Y	X		
	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 5$
$y_1 = 2$	0,2	0,15	0,1
$y_2 = 4$	0,25	0,1	0,2

Найти законы распределения составляющих X и Y, условный закон распределения вероятностей составляющей X при условии, что составляющая Y принимает значение $y_2 = 4$ и соответствующее условное математическое ожидание.

$\triangleleft$ Сложив вероятности по столбцам, получим закон распределения составляющей X:

X	1	3	5
P	0,45	0,25	0,3

Если сложим вероятности по строкам, то придём к закону распределения составляющей Y:

Y	2	4
P	0,45	0,55

Вероятность $P(Y=4)=0{,}55$: По формуле для нахождения условной вероятности получим: $P(X=1|Y=4)=\dfrac{P(X=1,Y=4)}{P(Y=4)}=\dfrac{0{,}25}{0{,}55}=\dfrac{5}{11}$. Аналогично:

$$P(X=3|Y=4)=\frac{P(X=3,Y=4)}{P(Y=4)}=\frac{0{,}1}{0{,}55}=\frac{2}{11},$$

$$P(X=5|Y=4)=\frac{P(X=5,Y=4)}{P(Y=4)}=\frac{0{,}2}{0{,}55}=\frac{4}{11}.$$

Условный закон распределения примет вид:

X	1	3	5
$P(X=x_i\|Y=4)$	0,45	0,25	0,3

$\triangleright$

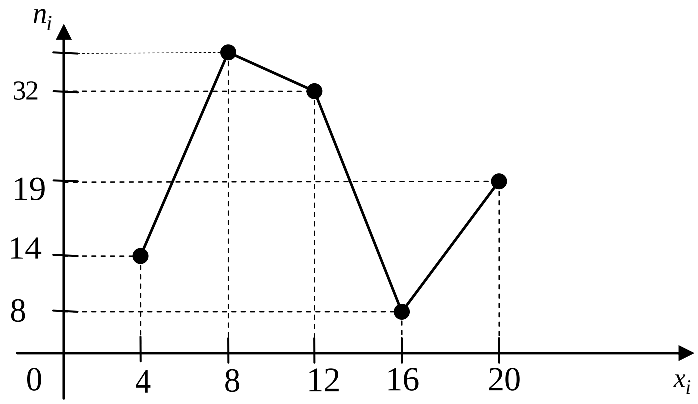
2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=100$

x_i	3	4	5	6	7
n_i	10	n_2	35	25	2

Найти относительную частоту варианты $x_2 = 4$.

$\triangleleft$ Найдем частоту n_2 варианты $x_2 = 4$: $n_2 = 100 - (10 + 35 + 25 + 2) = 28$, тогда относительная частота $w_2 = \dfrac{n_2}{n} = \dfrac{28}{100} = 0{,}28$. $\triangleright$

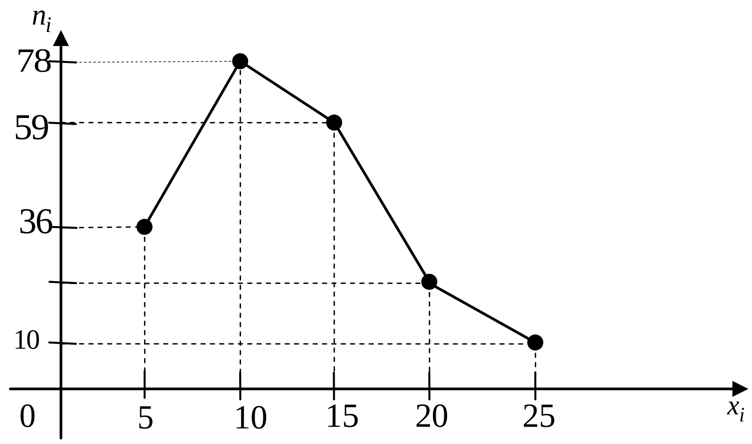
3. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 110$, полигон частот, которой имеет вид…



Найти частоту варианты $x_2 = 8$ в выборке.

$\triangleleft$ $n_2 = 110 - (8 + 14 + 19 + 32) = 37$. $\triangleright$

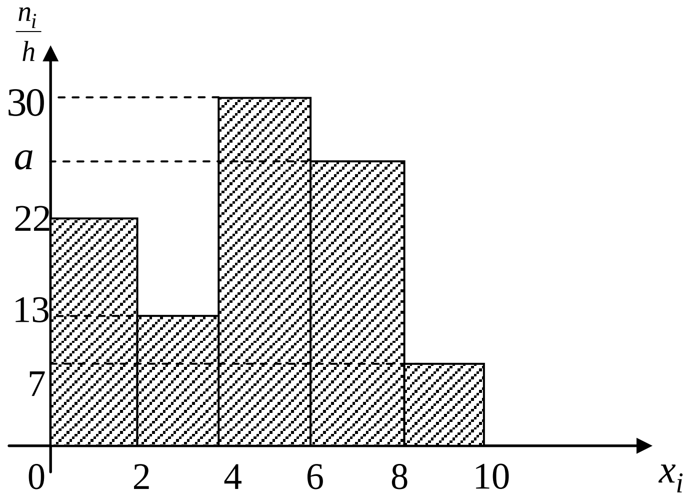
4. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 200$, полигон частот которой имеет вид…



Найти относительную частоту варианты x_4.

$\triangleleft$ $n_4 = 200 - (10 + 36 + 59 + 78) = 17$, $w_4 = \dfrac{17}{200} = 0{,}085$. $\triangleright$

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 200$, гистограмма частот, которой имеет вид



Найти значение *a*.

$\triangleleft$ Так как $h = 2,$ то $\sum \frac{n_i}{h} = 100 \Rightarrow a = 100 - (30 + 22 + 13 + 7) = 28$. $\triangleright$

6. Найти размах варьирования, моду и медиану вариационного ряда $5, 7, 9, 9, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 21$.

$\triangleleft$ Размах варьирования $R = x_{\max} - x_{\min} = 21 - 5 = 19$. Так как мода вариационного ряда – это варианта, имеющая наибольшую частоту, то мода $M_0 = 9$.Медианой вариационного ряда называется значение признака, приходящееся на середину ряда, поэтому медиана $Me = 13$.$\triangleright$

7. Проведено пять измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): $4{,}4;\ 5{,}1;\ 6{,}5;\ 7{,}6;\ 8{,}4$. Найти несмещенную оценку математического ожидания.

$\triangleleft$ Несмещённой оценкой математического ожидания является выборочная средняя $\bar{x}_в$, которая находится по формуле: $\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \Rightarrow$

$\bar{x}_в = \frac{1}{5}(4{,}4 + 5{,}1 + 6{,}5 + 7{,}6 + 8{,}4) = 6{,}4$. $\triangleright$

8. Проведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): $7;\ x_2;\ 10;\ 15$. Найти выборочную и исправленную выборочную дисперсии, если несмещенная оценка математического ожидания равна $\bar{x}_в = 10$.

$\triangleleft$ $\bar{x}_в = \frac{1}{4}(7 + x_2 + 10 + 15) = 10, \Rightarrow x_2 = 8$. Для нахождения D_B воспользуемся формулой: $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2 \cdot n_i$, тогда $D_в = \frac{1}{4}(9 + 4 + 0 + 25) = 9{,}5$. Получим исправленную выборочную дисперсию S^2, применив формулу:

$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в$, т.е. $S^2 = \frac{4}{3} \cdot 9{,}5 = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}$.$\triangleright$

9. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$.

x_i	10,1	10,4	10,7
n_i	2	4	4

Найти выборочное среднее квадратическое отклонение.

$\triangleleft$ $\sigma_в = \sqrt{D_в}$ где $D_в = \frac{1}{n}\sum x_i^{\ 2} n_i - \bar{x}_в^{\ 2}$. Для удобства вычислений, воспользуемся свойствами дисперсии $D(X + C) = D(X)$, где положив $C = -10{,}4$ тогда

$x_i^{\ *}$	-0,3	0	0,3
n_i	2	4	4

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum x_i n_i = \frac{1}{10}(-0{,}6 + 1{,}2) = 0{,}06,$$

$$D_в = \frac{1}{10}(0{,}09 \cdot 2 + 0{,}09 \cdot 4) - 0{,}0036 = 0{,}0504$$

$\sigma_в = \sqrt{0{,}0504}$. $\triangleright$

10. По результатам девяти независимых равноточных измерений найдены среднее значение температуры воды термального источника $\bar{x} = 42{,}32$ и "исправленное" среднее квадратическое отклонение $S = 5{,}0$. Требуется оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью $\gamma = 0{,}95$, если значения измерений распределены нормально.

$\triangleleft$ Истинное значение измеряемой величины равно её математическому ожиданию. Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала $\bar{x}_в - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$

Пользуясь таблицей значений функции Лапласа при $\gamma = 0{,}95$ и $n = 9$ находим $t_\gamma = 2{,}31$.

Найдем точность оценки $t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 2{,}31 \cdot \frac{5}{\sqrt{9}} = 3{,}85$ тогда границы доверительного интервала будут:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 42{,}32 - 3{,}85 = 38{,}47 \quad \text{и} \quad \bar{x} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 42{,}32 + 3{,}85 = 46{,}17.$$

Итак, с надёжностью 0,95 истинное значение измеряемой величины заключено в доверительном интервале $38{,}47 < a < 46{,}17$. $\triangleright$

11. При построении выборочного уравнения прямой линии регрессии Y на X вычислены выборочный коэффициент регрессии $\rho_{yx} = -2{,}45$ и выборочные средние $\bar{x}_в = 3{,}44$ и $\bar{y}_в = 7{,}18$. Составить уравнение регрессии Y на X.

$\lhd$ Уравнение регрессии Y на X имеет вид $y_x - \overline{y}_в = \rho_{yx}\left(x - \overline{x}_в\right)$=> $y_x - 7{,}18 = -2{,}45\left(x - 3{,}44\right) \Rightarrow y_x = -2{,}45x + 15{,}608$. $\rhd$

12. Исследуются по мощности два пласта угля. По двум независимым выборкам, объёмы которых соответственно равны $n = 60$ и $m = 50$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x} = 12{,}50$, $\bar{y} = 12{,}75$. Генеральные дисперсии: $D(X) = 1{,}2$, $D(Y) = 1{,}0$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$, при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

$$\lhd \; Z_{набл} = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n} + \dfrac{D(Y)}{m}}} = \frac{12{,}50 - 12{,}75}{\sqrt{\dfrac{1{,}2}{60} + \dfrac{1{,}0}{50}}} = -1{,}25 .$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область – двусторонняя. Найдем критическую точку $\Phi(Z_{кр}) = 0{,}5(1 - \alpha) = 0{,}5(1 - 0{,}01) = 0{,}495$. По таблице значений функции Лапласа находим $Z_{кр} = 2{,}58$.

Так как $\left| Z_{набл} \right| = 1{,}25 < Z_{кр} = 2{,}58$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, выборочные средние различаются незначимо. $\rhd$