1. Имеются 5 карточек из разрезной азбуки с буквами А, Б, М, О, У. Из них случайным образом извлекают (по одной) карточки до появления гласной буквы. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – количества извлеченных карточек.

$\triangleleft$ Обозначим события: Γ – взята гласная буква, C – взята согласная буква. Тогда вероятности возможных значений равны:

$$p_1 = P(X=1) = P(\Gamma) = \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad p_2 = P(X=2) = P(C)\cdot P(\Gamma/C) =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = 0{,}3; \quad p_3 = P(X=3) = P(C)\cdot P(C/C)\cdot P(\Gamma/C\cdot C) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 = 0{,}1.$$

Закон распределения случайной величины имеет вид:

X	1	2	3
P	0,6	0,3	0,1

. $\triangleright$

2. Дискретная случайная величина имеет следующий закон распределения:

X	-4	-1	0	2	3
P	0,1	0,2	p_3	0,2	0,1

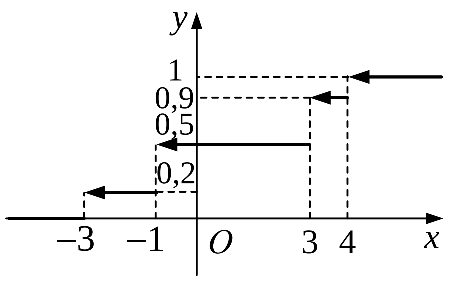
.

Найти вероятности p_3 и $P(|X| \le 2)$.

$\triangleleft$ Так как $\sum_{k=1}^{5} p_k = 1$, то $p_3 = 1 - (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1) = 0{,}4$. Тогда

$$P(|X| \le 2) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=2) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}8. \triangleright$$

3. Найти закон распределения дискретной случайной величины X, если график ее функции распределения вероятностей $F(x)$ имеет вид:



.

$\triangleleft$ Из графика $F(x)$ следует, что возможные значения д.с.в X: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Тогда их вероятности находим по формуле $p_i = P(X = x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i)$, т.е. $p_1 = 0{,}2 - 0 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}9 - 0{,}5 = 0{,}4$; $p_4 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Закон распределения случайной величины имеет вид:

X	-3	-1	3	4

P	0,2	0,3	0,4	0,1

. ▷

4. Для некоторого орудия вероятность попадания в цель равна 0,8. Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X −количества попаданий при трех выстрелах.

◁ Здесь возможные значения д.с.в. X − это $x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 2,$ $x_4 = 3.$ Так как дело имеем с повторением независимых опытов, то вероятности $p_i = P(X = x_i)$ находим по формуле Бернулли:

$$p_1 = C_3^0 \cdot (0,8)^0 \cdot (0,2)^3 = 0,008;\ \ p_2 = C_3^1 \cdot 0,8 \cdot (0,2)^2 = 0,096;$$

$$p_3 = C_3^2 \cdot (0,8)^2 \cdot 0,2 = 0,384;\quad p_4 = C_3^3 \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^0 = 0,512.$$

Используя определение функции распределения вероятностей $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$, запишем ее вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0; \\ 0,008; & 0 < x \le 1; \\ 0,104; & 1 < x \le 2; \\ 0,488; & 2 < x \le 3; \\ 1; & x > 3. \end{cases}$$

Так как закон распределения случайной величины биномиальный, то $M(X) = np = 3 \cdot 0,8 = 2,4;\ D(X) = npq = 3 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,48.$ ▷

5. Дана функция распределения вероятностей дискретной случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le -5; \\ 0,5; & -5 < x \le -1; \\ 0,7; & -1 < x \le 2; \\ 1; & x > 2. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

◁ Дискретные случайные величины X и X^2 имеют следующие законы распределения:

X	-5	-1	2
P	0,5	0,2	0,3

X^2	25	1	4
P	0,5	0,2	0,3

Тогда $M(X)=\sum_{k=1}^{3}x_k p_k=-5\cdot 0,5-1\cdot 0,2+2\cdot 0,3=-2,1;$

$M\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{3}x_k^2 p_k=25\cdot 0,5+1\cdot 0,2+4\cdot 0,3=13,9;\quad D(X)=$

$=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=13,9-(2,1)^2=9,49;\ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{9,49}.$ ⊳

6. Может ли функция $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctgx$ быть функцией распределения вероятностей некоторой непрерывной случайной величины $X\in(-\infty;+\infty)$?

⊲ Проверим у заданной функции $F(x)$ наличие всех свойств функции распределения вероятностей: $F(-\infty)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}=0;$

$F(+\infty)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=1;$ $F(x)-$ непрерывная, возрастающая, $F(x)\in(0,1).$
Следовательно, данная функция может быть функцией распределения вероятностей непрерывной случайной величины $X\in(-\infty;+\infty)$. ⊳

7. Плотность распределения вероятностей некоторой непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0; & x\le-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}(1+\cos x); & -\pi<x\le\pi;\\ 0; & x>\pi.\end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$.

⊲ Так как $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(x)dx,$ то

при $x\le-\pi$: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0;$

при $-\pi<x\le\pi$:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-\pi}0dx+\int\limits_{-\pi}^{x}\frac{1}{2\pi}(1+\cos x)dx=\frac{1}{2\pi}(x+\sin x)\Big|_{-\pi}^{x}=\frac{1}{2\pi}(x+\sin x+\pi);$$

при $x>\pi$: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-\pi}0dx+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)dx+\int\limits_{\pi}^{x}0dx=1.$ Итак,

$$F(x)=\begin{cases}0; & x\le -\pi;\\ \dfrac{1}{2\pi}(\pi+x+\sin x); & -\pi< x\le \pi;\\ 1; & x>\pi.\end{cases} \quad \triangleright$$

8. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0; & x\le 0;\\ \dfrac{3}{8}x^2; & 0< x\le 2;\\ 0; & x>2.\end{cases}$$

$$\triangleleft\ M(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2=\frac{3}{2};$$

$$D(X)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{3}{8}x^2dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\frac{x^5}{5}\bigg|_0^2-\frac{9}{4}=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20};\ \sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{20}}.\triangleright$$

9. Найти дисперсию $D(X)$, если случайная величина имеет функцию распределения вероятностей вида: $F(x)=\begin{cases}0; & x\le 0;\\ \dfrac{1}{16}x^2; & 0< x\le 4;\\ 1; & x>4.\end{cases}$

$\triangleleft\ f(x)=F'(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{8}x$ в интервале $(0;\,4)$, вне этого интервала $f(x)=0.$ Тогда

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx=\int_0^4 x\cdot\frac{1}{8}x\,dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^4=\frac{8}{3}.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)dx-\left(M(X)\right)^2=\int_0^4 x^2\cdot\frac{1}{8}x\,dx-\left(\frac{8}{3}\right)^2=$$

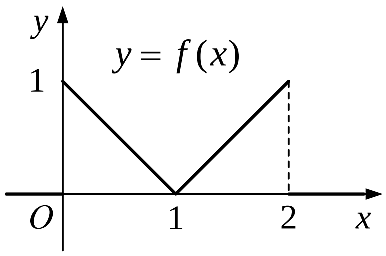
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^4-\frac{64}{9}=8-\frac{64}{9}=\frac{8}{9}.\triangleright$$

10. Известно, что для равномерно распределенной случайной величины $X \in [1; b]$ вероятность $P(2 < X < 4) = \frac{1}{3}$. Найти число b, если $b > 4$.

$\lhd$ Так как случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[1; b]$, $4 < b$, то интервал $(2; 4)$ – это $\frac{1}{3}$ часть всего отрезка $[1; b]$. Следовательно, $b - 1 = 3(4-2) \Rightarrow b = 6 + 1 = 7$, $b = 7$. $\rhd$

11. Найти математическое ожидание $M(X)$ непрерывной случайной величины X, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид: $f(x) = \begin{cases} 0; & x < 0; \\ |x-1|; & 0 \le x \le 2; \\ 0; & x > 2. \end{cases}$

$\lhd$ Так как для любой случайной величины, имеющей симметричный закон распределения (см. рис.), математическим ожиданием является



центр симметрии, то здесь $M(X) = 1$. $\rhd$