1. Сколько трёхкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего 10 цифр.

⊲ Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих трех кнопок – сочетание. Отсюда возможно вариантов $C_{10}^{3} = \dfrac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$. ⊳

2. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4, если цифры в числе не повторяются?

⊲ Так как различные четырёхзначные числа могут быть получены всевозможными перестановками этих цифр, то количество всех таких чисел равно $P_4 = 4! = 24$. ⊳

3. Комиссии, состоящей из семи членов, необходимо выбрать председателя и заместителя. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности председателя и его заместителя?

⊲ Так, как порядок, кто председатель, а кто его заместитель, важен, то всего существует $A_7^2 = \dfrac{7!}{(7-2)!} = \dfrac{7!}{5!} = 6\cdot 7 = 42$ способа распределения обязанностей. ⊳

4. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы 5 гвоздик одного цвета?

⊲ Можно выбрать 5 розовых гвоздик или 5 красных гвоздик. Розовые гвоздики можно выбрать одним способом, а число способов выбрать красные гвоздики равно: $C_{10}^{5} = \dfrac{10!}{5!\cdot 5!} = 252$. Используя правило сложения, получим общее число способов: 253. ⊳

5. На первой полке стоит 5 книг, а на второй 10. Сколькими способами можно выбрать одну книгу с первой полки и одну со второй?

⊲ Для выбора первой книги существует 5 способов, для выбора второй 10 способов. Используя правило произведения, получим общее количество способов равно $5\cdot 10 = 50$. ⊳

6. В урне 18 шаров – 10 белых и 8 чёрных. Наугад извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров окажутся: а) все шары белые; б) три шара белых и два чёрных, в) хотя бы четыре белых.

⊲ Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 5 шаров из восемнадцати т.е. $n = |\Omega| = C_{18}^{5}$.

а) Обозначим событие A – все шары белые. Благоприятствующими появлению события A будут те элементарные исходы, когда 5 шаров выбираются только из белых. Следовательно, $m = |A| = C_{10}^{5}$. Тогда вероятность события A:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{10}^5}{C_{18}^5}=\frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\frac{5!\cdot 13!}{18!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}=\frac{1}{34}.$$

б) Обозначим событие B – три шара белых и два чёрных. Три белых шара могут быть выбраны C_{10}^3 способами, а два чёрных – C_8^2 способами. По правилу произведения число исходов, благоприятствующих появлению события B, равно $m=C_{10}^3\cdot C_8^2$. Тогда вероятность события B:

$$P(B)=\frac{C_{10}^3\cdot C_8^2}{C_{18}^5}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot\frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot\frac{5!\cdot 13!}{18!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}=\frac{20}{51}.$$

в) Обозначим событие D – хотя бы четыре белых. По правилу произведения и суммы число исходов, благоприятствующих появлению события D, равно $m=C_{10}^4\cdot C_8^1+C_{10}^5\cdot C_8^0$. Тогда вероятность события D:

$$P(D)=\frac{C_{10}^4\cdot C_8^1+C_{10}^5\cdot C_8^0}{C_{18}^5}=\frac{23}{102}.\ \triangleright$$

7. (Задача о встрече.) Двое студентов условились встретиться в определённом месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждёт другого в течение 10 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает время своего прихода (в промежутке между двумя и тремя часами дня).

$\triangleleft$ Обозначим через x и y – моменты прихода на место встречи первого и второго студентов соответственно. Для простоты 2 часа дня примем за начало отсчёта. Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат Oxy. Тогда пространство элементарных событий может быть записано так: $\Omega=\{(x,y):0\le x\le 1;0\le y\le 1\}$. Геометрически Ω представляет собой квадрат со стороной 1 (рис.1.12). Обозначим событие A– встреча состоится. Встреча состоится, если промежуток времени между моментом прихода первого и моментом прихода второго студента не превосходит 10 минут, т.е. $\frac{1}{6}$ часа. Следовательно,

$A=\left\{(x,y)\in\Omega:|x-y|\le\frac{1}{6}\right\}$. На рис.1.12 множеству A соответствует заштрихованная фигура. Площадь этой фигуры равна $1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{11}{36}$. Таким образом, согласно геометрическому определению

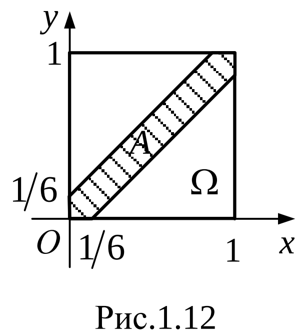


Рис.1.12

вероятности $P(A)=\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\dfrac{\frac{11}{36}}{1}=\dfrac{11}{36}$. ▷

8. На шести карточках написаны буквы, образующие слово «РЕМОНТ». Карточки перемешиваются и из них наугад поочередно извлекают и выкладывают слева направо четыре карточки. Найти вероятность события A– получится слово «МОРЕ» .

◁ **Первый способ.** Введем события

A_1 – «на первой выбранной карточке написана буква М»;

A_2 – «на второй выбранной карточке написана буква О»;

A_3 – «на третьей выбранной карточке написана буква Р»;

A_4 – «на четвертой выбранной карточке написана буква Е».

Тогда $A=A_1A_2A_3A_4$. Так как A_1,A_2,A_3,A_4 – зависимые события, то $P(A_1)=\dfrac{1}{6},\ P(A_2/A_1)=\dfrac{1}{5},\ P(A_3/A_1A_2)=\dfrac{1}{4},\ P(A_4/A_1A_2A_3)=\dfrac{1}{3}$.

Отсюда, согласно формуле умножения вероятностей, получаем

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P\left(A_3/A_1A_2\right)\cdot P(A_4/A_1A_2A_3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{360}.$$

Второй способ. Решим эту задачу, используя классическое определение вероятности. Поскольку карточки назад не возвращаются и порядок выбора существенен, то общее число элементарных исходов $|\Omega|=A_6^4=\dfrac{6!}{2!}==6\cdot5\cdot4\cdot3=360$. Событию A благоприятствует только один элементарный исход, т.е. $|A|=1$. Значит, $P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}=\dfrac{1}{360}$.▷

9. Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

◁ Обозначим события: A – «появление шестерки при бросании первой кости», B – «появление шестерки при бросании второй кости». Необходимо определить вероятность события $C=A+B.$ События A и B – совместные и независимые, поэтому

$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$ где $P(A)=\dfrac{1}{6},\ P(B)=\dfrac{1}{6},$

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\dfrac{1}{36}.$ Тогда $P(C)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{36}=\dfrac{11}{36}.$ ▷

10. Три стрелка независимо друг от друга попадают в цель при одном выстреле с вероятностью 0,9; 0,8 и 0,7 соответственно. Найти вероятности следующих событий: A – «в мишень попал только первый стрелок»; B – «в мишень попал хотя бы один стрелок».

◁ а) Рассмотрим события A_i – «в цель попал i-тый стрелок», $i = 1, 2, 3$. Из условия задачи известно, что события A_1, A_2, A_3 независимые и $P(A_1) = 0,9;\ P(A_2) = 0,8;\ P(A_3) = 0,7.$ Тогда

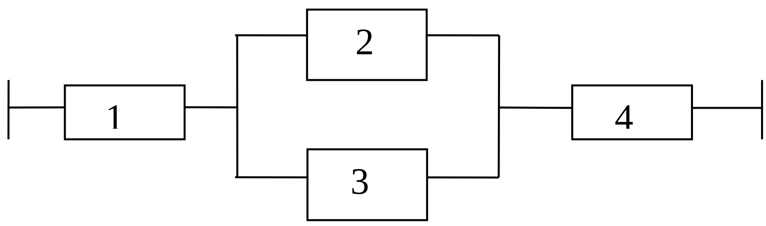
$P(A) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0,9 \cdot (1-0,8) \cdot (1-0,7) = 0,054$.

б) Событие B произойдет, если все трое попадут в мишень, если в мишень попадут любые два стрелка и т.д. Очевидно, что проще найти вероятность противоположного события $\bar{B}$ – «все трое не попали в мишень».

$P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = (1-0,9) \cdot (1-0,8) \cdot (1-0,7) = 0,006$. Тогда

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,006 = 0,994$. ▷

11. Дана схема передачи сигнала, элементы которой образуют цепь с одним входом и одним выходом. Предполагается, что отказ любого элемента приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент, и не приводит к отказу других элементов. Известна надежность (вероятность безотказной работы) элементов схемы соответственно $p_1 = 0,9;$ $p_2 = 0,6;\ p_3 = 0,5;\ p_4 = 0,7.$ Найти надежность схемы:



◁ Пусть события A_i – работает i – тый элемент, $i = \overline{1,4}$. Выразим через A_i событие B, заключающееся в том, что схема работает. Схема работает, если не откажет 1–ый элемент, и работают 2–ой или 3–ий элементы, и не откажет 4–тый элемент. Тогда $B = A_1\left(A_2 + A_3\right)A_4$.

Используем теоремы сложения и умножения вероятностей:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2 + A_3) \cdot P(A_4) =$$

$$= P(A_1) \cdot \big(P(A_2) + P(A_3) - P(A_2A_3)\big) \cdot P(A_4) = p_1\left(p_2 + p_3 - p_2p_3\right)p_4 =$$

$$= 0,9\big(0,6 + 0,5 - 0,6 \cdot 0,5\big) \cdot 0,7 = 0,504.$$ ▷

12. В торговую фирму поступают телевизоры от трех фирм изготовителей, в соотношении $2:5:3$. Телевизоры, поступающие от первой фирмы, требуют ремонта в течение гарантийного срока в 15% случаев, от второй и третьей – соответственно в 8% и 6% случаев. Найти вероятность того, что проданный телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока.

◁ Определим событие, вероятность которого требуется найти: A – «проданный телевизор потребует гарантийного ремонта». Построим систему гипотез: H_i – «проданный телевизор был произведен i-той фирмой», $i=\overline{1,3}$. Ясно, что события H_i $(i=\overline{1,3})$ являются попарно несовместными (телевизор не может быть изготовлен двумя фирмами одновременно), и одно из них обязательно происходит. Согласно условию задачи телевизоры поступают в продажу от трех фирм в пропорции $2:5:3$. Обозначим через x количество телевизоров, приходящихся на одну долю в указанной пропорции. Тогда общее количество телевизоров, поступающих в продажу: $2x+5x+3x=10x$. При этом количество телевизоров, поступивших от первой фирмы равно $2x$, следовательно, согласно классической формуле вычисления вероятностей: $P(H_1)=\dfrac{2x}{10x}=\dfrac{1}{5}$. Аналогично найдем вероятности остальных гипотез: $P(H_2)=\dfrac{1}{2}$, $P(H_3)=\dfrac{3}{10}$.

Условные вероятности события A после каждой из гипотез заданы в условии задачи:

$$P(A/H_1)=0{,}15;\quad P(A/H_2)=0{,}08;\quad P(A/H_3)=0{,}06.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности, получаем

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{1}{5}\cdot 0{,}15+\frac{1}{2}\cdot 0{,}08+\frac{3}{10}\cdot 0{,}06=0{,}088. \rhd$$

13. После осмотра больного врач считает, что равновозможно одно из двух заболеваний *C* или *D*. Для уточнения диагноза больного направляют на анализ, исход которого дает положительную реакцию при заболевании *C* в 30% случаев, а при заболевании *D* – в 20% случаев. Анализ дал положительную реакцию. Какое заболевание становится более вероятным?

$\lhd$ Рассмотрим событие A – «анализ дал положительную реакцию». Систему гипотез можно сформулировать следующим образом: H_1 – «пациент имеет заболевание *C*», H_2 – «пациент имеет заболевание *D*». Из условия задачи ясно, что $P(H_1)=0{,}5$, $P(H_2)=0{,}5$. Условные вероятности события A после каждой из гипотез равны соответственно: $P(A/H_1)=0{,}3$; $P(A/H_2)=0{,}2$.

Вероятности того, что пациент имеет заболевания C (или D) при условии, что анализ дал положительную реакцию, определяем, используя формулы Байеса: $P(H_1/A)=\dfrac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{2}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}=\dfrac{0{,}15}{0{,}25}=0{,}6$;

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{\sum_{i=1}^{2}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}=\frac{0{,}1}{0{,}25}=0{,}4.$$

Так как $P(H_1/A)>P(H_2/A)$, то заболевание C становится более вероятным. $\rhd$

14. Четыре стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8 для каждого стрелка. Найти вероятность того, что только три стрелка попадут в мишень.

◁ Так как для всех стрелков вероятность попасть в мишень одинакова $\left(p=0,8;\;\; q=1-p=0,2\right)$ и безразлично, какие именно трое из них попадут в мишень, то применима формула Бернулли. Найдем вероятность того, что три стрелка $\left(k=3\right)$ из четырех $\left(n=4\right)$ попадут в мишень:

$P_4(3)=C_4^3\cdot 0,8^3\cdot 0,2^1 = =4\cdot 0,512\cdot 0,2=0,4096$. ▷

15. Отдел технического контроля проверяет партию из 100 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найти вероятность того, что в партии: а) 80 стандартных деталей; б) не менее 85 и не более 95 стандартных деталей; в) не менее 90 стандартных деталей.

◁ а) По условию, $n=100$; $p=0,9$; $q=1-p=0,1$; $k=80$. Так как n велико, воспользуемся локальной формулой Лапласа:

$P_{100}(80)\approx\dfrac{1}{\sqrt{100\cdot 0,9\cdot 0,1}}\cdot\varphi\left(\dfrac{80-100\cdot 0,9}{\sqrt{100\cdot 0,9\cdot 0,1}}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\varphi\left(-\dfrac{10}{3}\right)$. Т.к. $\varphi(x)$ – четная функция, то $\varphi\left(-\dfrac{10}{3}\right)=\varphi\left(\dfrac{10}{3}\right)$. По таблице значений функции (приложение 1) находим $\varphi\left(\dfrac{10}{3}\right)\approx 0,0016$. Тогда искомая вероятность

$P_{100}(80)\approx 0,0005$.

б) По условию, $n=100$; $p=0,9$; $q=1-p=0,1$; $k_1=85$; $k_2=95$.
Воспользуемся интегральной формулой Лапласа:

$P_{100}(85\le k\le 95)\approx\Phi\left(\dfrac{95-100\cdot 0,9}{\sqrt{100\cdot 0,9\cdot 0,1}}\right)-\Phi\left(\dfrac{85-100\cdot 0,9}{\sqrt{100\cdot 0,9\cdot 0,1}}\right)=\Phi\left(\dfrac{5}{3}\right)-\Phi\left(\dfrac{-5}{3}\right)$

Т.к. $\Phi(x)$ – нечетная функция, то $\Phi\left(-\dfrac{5}{3}\right)=-\Phi\left(\dfrac{5}{3}\right)$. По таблице значений функции Лапласа (приложение 2) находим $\Phi\left(\dfrac{5}{3}\right)\approx 0,4525$. Тогда искомая вероятность $P_{100}(85\le k\le 95)\approx 2\cdot 0,4525=0,905$.

в) По условию, $n=100$; $p=0,9$; $q=1-p=0,1$; $k\ge 90$, т.е. $k_1=90$; $k_2=100$. Воспользуемся интегральной формулой Лапласа:

$P_{100}(90\le k\le 100)\approx\Phi\left(\dfrac{100-100\cdot 0,9}{\sqrt{100\cdot 0,9\cdot 0,1}}\right)-\Phi\left(\dfrac{90-100\cdot 0,9}{\sqrt{100\cdot 0,9\cdot 0,1}}\right)=\Phi\left(\dfrac{10}{3}\right)-\Phi\left(0\right).$

По таблице значений (приложение 2) находим $\Phi\left(\frac{10}{3}\right) \approx 0,4995$, $\Phi(0)=0$.

Тогда искомая вероятность $P_{100}(90 \le k \le 100) \approx 0,4995$. ⊳

16. Книга издана тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что книга сброшюрована неправильно, равна 0,00001. Найти вероятность того, что тираж содержит: а) ровно пять неправильно сброшюрованных книг; б) хотя бы одну неправильно сброшюрованную книгу.

⊲ Так как $n=100000$ велико, вероятность $p=0,00001$ мала, то имеет место формула Пуассона. Находим $\lambda = np = 100000 \cdot 0,00001 = 1$.

а) Найдем вероятность того, что в тираже будет ровно пять $(k=5)$ бракованных книг: $P_{100000}(5) \approx \frac{1^5}{5!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{120} \cdot e^{-1}$.

б) Найдем вероятность того, что в тираже будет хотя бы одна неправильно сброшюрованная книга. События «в тираже будет хотя бы одна неправильно сброшюрованная книга» и «в тираже не будет ни одной неправильно сброшюрованной книги» – противоположные, следовательно $P_{100000}(k \ge 1) + P_{100000}(0) = 1$. Отсюда искомая вероятность того, что хотя бы одна книга будет сброшюрована неправильно, равна

$P_{100000}(k \ge 1) = 1 - P_{100000}(0) \approx 1 - \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} = 1 - e^{-1}$. ⊳