Задача 1. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. В случае сходимости ряда найти его сумму.

$\lhd$ Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$. Чтобы найти его частичную сумму S_n, преобразуем общий член ряда, используя метод неопределенных коэффициентов:

$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}$, тогда $A(n+1)+Bn=1$, откуда

$\begin{cases}A+B=0,\\ A=1,\end{cases}$ $\begin{cases}B=-1,\\ A=1\end{cases}$ и $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Запишем n первых членов ряда: $a_1=1-\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $a_4=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$, …, $a_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, тогда

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$. Найдем предел $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1$. Следовательно, сумма ряда $S=1$, а сам ряд сходится. $\rhd$

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{5\pi}{n}$.

$\lhd$ Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Вычислим предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{arctg\frac{5\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=5\pi\neq 0$.

Следовательно, по предельному признаку сравнения поведение рядов одинаково, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{5\pi}{n}$ расходится. $\rhd$

Задача 3. С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$.

$\lhd$ Запишем общий член ряда $a_n=\frac{n+1}{3^n}$ и найдем последующий: $a_{n+1}=\frac{(n+1)+1}{3^{n+1}}=\frac{n+2}{3^{n+1}}=\frac{n+2}{3^n\cdot 3}$. Вычислим $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{3^n\cdot 3}}{\frac{n+1}{3^n}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3^n\cdot 3}\cdot\frac{3^n}{n+1}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{3}<1$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$ сходится по признаку Даламбера. $\rhd$

Задача 4. С помощью радикального признака Коши исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{3n+7}\right)^{2n}$.

$\lhd$ Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+4}{3n+7}\right)^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{3n+7}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}<1$,

следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{3n+7}\right)^{2n}$ сходится. $\rhd$

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

$\lhd$ Применим интегральный признак Коши. Очевидно, что функция $f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x}$ удовлетворяет условиям признака.

Вычислим $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int\limits_2^{\beta}\frac{dx}{x\ln^3 x}=$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\left(\left.(\ln x)^{-2}\right|_2^{\beta}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\left((\ln\beta)^{-2}-(\ln 2)^{-2}\right)=\frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, следовательно, и ряд сходится. $\rhd$

Задача 6. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ на сходимость.

◁ Применим признак Лейбница:

1) $a_1 = 1 > a_2 = \frac{1}{2} > a_3 = \frac{1}{3} > \ldots > a_n = \frac{1}{n} > \ldots$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Условия признака Лейбница выполняются, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится.

Ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится как гармонический, поэтому исходный ряд сходится условно. ▷

Задача 7. Найти радиус и интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3}$.

◁ Это степенной ряд общего вида с $a_n = \frac{1}{n^3}$ и $x_0 = -2$. Тогда $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3}$ и $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{(n+1)^3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$. Следовательно, ряд сходится для всех значений $x \in (x_0 - R; x_0 + R) = (-3; -1)$. ▷

Задача 8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

◁ Применяя признак Даламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\cdot n}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x|.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$, т.е. интервалом сходимости является интервал $(-1; 1)$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала. При $x = -1$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, который сходится условно по признаку Лейбница. При $x=1$ получим расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Тогда, области сходимости принадлежит только точка $x=-1$, и она определяется полуоткрытым интервалом $[-1;1)$. $\triangleright$

Задача 9. Разложить функцию $f(x)=\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

$\triangleleft$ Дифференцируя функцию $f(x)=\ln x$, получим $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f'''(x)=\frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}$, …. Подставляя $x_0=1$, имеем $f(1)=\ln 1=0$, $f'(1)=1$, $f''(1)=-1$, $f'''(1)=2$, $f^{(4)}(1)=-6$, …. Следовательно,

$$\ln x=0+1(x-1)+\frac{-1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3+\frac{-6}{4!}(x-1)^4+\ldots=$$

$$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

Можно показать, что данное разложение имеет место, если $x\in(0;\,2]$. $\triangleright$

Задача 10. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\triangleleft$ Перепишем данную функцию в виде $f(x)=x\cdot\left(1+\left(-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$ и воспользуемся разложением

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\ .$$

Подставляя $m=-\frac{1}{2}$ и делая подстановку $t=-x^2$, получим

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=(1+t)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}t+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}t^3+\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{2\cdot 1!}t+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}t^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}t^3+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}t^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\left(-x^2\right)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}(-1)^n x^{2n}=$$

$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$. Это разложение справедливо для всех $x\in(-1;1]$.

Тогда $f(x)=x\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}\right)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n+1}$.

Учитывая, что $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)=(2n-1)!!$, $2^n\cdot n!=(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n$,

окончательно получим: $f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$. ▷

Задача 11. Вычислить $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ с точностью до $0{,}01$.

◁ Используя разложение $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$,

получим

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^4}{4!}+\ldots=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\cdot 2!}-\frac{x^6}{8\cdot 3!}+$$

$+\frac{x^8}{16\cdot 4!}-\ldots$ и $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\cdot 2!}-\frac{x^6}{8\cdot 3!}+\frac{x^8}{16\cdot 4!}-\ldots\right)dx=$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{20\cdot 2!}-\frac{x^7}{56\cdot 3!}+\frac{x^9}{144\cdot 4!}-\ldots\right)\Bigg|_0^1\approx 1-0{,}1667+0{,}025-0{,}003+0{,}0003-$$

$-\ldots\approx 0{,}86$, так как $0{,}003<0{,}01$. ▷

Задача 12. Найти решение уравнения $y''+x^2y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\quad y'(0)=1$.

$\triangleleft$ Очевидно, что $y_0 = y(0) = 1$, $y_0' = y'(0) = 1$. Переписав уравнение в виде $y'' = -x^2 y$, найдем $y_0'' = y''(0) = -0 \cdot y_0 = 0$;

$y''' = -2xy - x^2 y'$ и $y_0''' = y'''(0) = -2 \cdot 0 \cdot y_0 - 0 \cdot y_0' = 0$;

$y^{(4)} = -2y - 4xy' - x^2 y''$ и $y_0^{(4)} = y^{(4)}(0) = -2y_0 - 4 \cdot 0 \cdot y_0' - 0 \cdot y_0'' = -2$;

$y^{(5)} = -6y' - 6xy'' - x^2 y'''$ и $y_0^{(5)} = y^{(5)}(0) = -6 \cdot y_0' - 6 \cdot 0 \cdot y_0'' - 0 \cdot y_0''' = -6$.

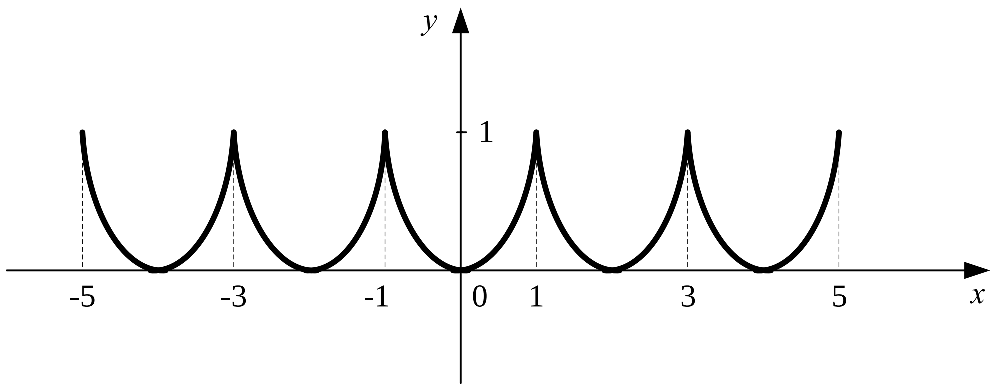
Подставляя найденные значения в ряд Тейлора, получим решение уравнения

$$y = 1 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 + \frac{-2}{4!}(x-0)^4 + \frac{-6}{5!}(x-0)^5 + \ldots =$$

$$= 1 + x - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \ldots . \quad \triangleright$$

Задача 13. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ с периодом 2, заданную на отрезке $[-1; 1]$.

$\triangleleft$ Данная функция является четной. Ее график – дуга параболы, заключенная между точками $(-1; 1)$ и $(1; 1)$. График функции $y = S(x)$ изображен на рисунке:



Найдем коэффициенты Фурье при $l = 1$: $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$;

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx = 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx.$$

Применяя дважды формулу интегрирования по частям, получим

$$a_n = \frac{2}{n\pi}x^2 \sin n\pi x\Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi}\int_0^1 x \sin n\pi x dx = -\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x dx = \frac{4}{n^2\pi^2}x\cos n\pi x\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \cos n\pi x dx = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n - \frac{4}{n^3\pi^3}\sin n\pi x\Big|_0^1 = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n.$$

Так как функция $f(x) = x^2$ является четной, то $b_n = 0$.

Следовательно, $f(x) \sim \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \cos n\pi x = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$. ▷