Задача 1. Решить дифференциальное уравнение

$\operatorname{tg} x \cdot \sin^2 y \, \mathrm{d} x + \cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} y \, \mathrm{d} y = 0$.

◁ Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на $\sin^2 y \cdot \cos^2 x$:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \mathrm{d} x + \frac{\operatorname{ctg} y}{\sin^2 y} \mathrm{d} y = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{tgx}{\cos^2 x} dx + \int \frac{ctgy}{\sin^2 x} dy = C_1,$$

где C_1- произвольная постоянная.

$$\frac{1}{2} tg^2 x - \frac{1}{2} ctg^2 y = C_1,$$

Общий интеграл уравнения:

$$tg^2 x - ctg^2 y = C,$$

где C - произвольная постоянная. ▷

Задача 2. Решить задачу Коши $y' \operatorname{tg} x + y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

◁ Запишем производную y' в виде $\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}$ и подставим в данное уравнение:

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} \operatorname{tg} x + y = 0.$$

Разделяя переменные, получаем: $\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} \operatorname{tg} x = -y$,

$$\frac{\mathrm{d} y}{y} = -\frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d} x.$$

Интегрируем обе части: $\ln|y| = -\ln|\sin x| + \ln C_1$,

где $C_1 > 0$ - произвольная постоянная.

$$\ln|y| = \ln\frac{C_1}{|\sin x|}\ ,$$

$$y = \frac{C}{\sin x},$$

где $C = \pm C_1,\ C \neq 0$.

Заметим, что $y = 0$ также будет решением уравнения. Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \frac{C}{\sin x},$$

где C - произвольная постоянная, $C \in R$.

Подставим в найденное общее решение начальные условия: $1 = \dfrac{C}{\sin\frac{\pi}{2}},\ C = 1$.

Тогда частное решение, удовлетворяющее условию задачи, имеет вид

$$y = \frac{1}{\sin x}.\ \triangleright$$

Задача 3. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(x - y\ \cos\ \frac{y}{x}\right)\ \mathrm{d}x + x\ \cos\ \frac{y}{x}\ \mathrm{d}y = 0.$$

$\triangleleft$ Здесь $P(x, y) = x - y\ \cos\dfrac{y}{x},\ Q(x, y) = x\ \cos\dfrac{y}{x}$.

Заменяя x на $t\,x$, y на $t\,y$, получаем

$$P(t\,x, t\,y) = t\,x - t\,y\cos\frac{t\,y}{t\,x} = t\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right) = t\cdot P(x,y),$$

$$Q(t\,x,\ t\,y) = t\,x\ \cos\ \frac{t\,y}{t\,x} = t\,x\ \cos\ \frac{y}{x} = t\cdot Q(x,y).$$

Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции первой степени, следовательно, данное уравнение является однородным.

Выполним в уравнении замену: $y = z\cdot x \Rightarrow y' = z'x + z$.

Имеем $x - z\,x\cos z + x\cos z\ (z'x + z) = 0$.

Получили уравнение с разделяющимися переменными

$x + x^2 \cdot \cos z \cdot z' = 0$.

Так как по условию $x \neq 0$,

то $\int \cos z \, \mathrm{d} z + \int \frac{\mathrm{d} x}{x} = C \quad \Rightarrow \quad \sin z + \ln|x| = C$ − общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Возвращаясь к исходной функции y по формуле $z = \frac{y}{x}$, получаем общий интеграл в виде $\sin \frac{y}{x} + \ln|x| = C$,

где C - произвольная постоянная. ▷

Задача 4. Решить задачу Коши $2xy\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = y^2 - x^2$, $y(2) = 1$.

◁ Это однородное уравнение.

Решим его, используя подстановку $y = z \cdot x$:

$$2x^2 z\left(\frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} x} x + z\right) = x^2(z^2 - 1).$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$2xz\frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} x} + z^2 + 1 = 0,$$

$$\frac{2z}{z^2+1}\mathrm{d} z + \frac{\mathrm{d} x}{x} = 0,$$

$\ln\left(z^2+1\right) + \ln|x| = \ln C_1$, где $C_1 > 0$ - произвольная постоянная.

Общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: $(z^2+1)x = C$, где $C = \pm C_1$, $C \neq 0$.

Согласно замене $z = \frac{y}{x}$ получаем

$y^2 + x^2 = Cx$ − общий интеграл однородного уравнения.

Используя начальные условия $y = 1$ при $x = 2$, вычислим константу C:

$1^2 + 2^2 = C \cdot 2$, т.е. $C = \frac{5}{2}$.

Частный интеграл однородного уравнения $y^2+x^2=\frac{5}{2}x$. ▷

Задача 5. Решить дифференциальное уравнение $y'-y\cdot ctg\,x=\sin x$.

◁ Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решение ищем в виде $y=u(x)\cdot v(x)$, где $u(x),v(x)$ - некоторые неизвестные функции. Подставляя в уравнение $y=u\cdot v,\ \ y'=u'v+uv'$, получаем

$$u'v+uv'-u\cdot v\cdot ctg\,x=\sin x$$

или

$$u'v+u\left(v'-v\cdot ctg\,x\right)=\sin x. \qquad (1)$$

Примем за $v(x)$ любое отличное от нуля решение уравнения

$$\frac{dv}{dx}-vctg\,x=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dv}{v}=ctg\,xdx,$$

$$\ln|v|=\ln|\sin x|,$$

$$v=\sin x.$$

Подставим v в уравнение (1): $\sin x\frac{du}{dx}=\sin x$,

$$du=dx,$$

$$u=x+C.$$

Общее решение имеет вид $y=u\cdot v=\left(x+C\right)\sin x$,

где C - произвольная постоянная. ▷

Задача 6. Решить дифференциальное уравнение

$$(2x+y)\,y'=y+4y'y^2\ln y.$$

◁ Уравнение не является ни уравнением с разделяющимися переменными, ни однородным, ни линейным относительно y и y'.

Заметим, что $y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{\mathrm{d}\,x/\mathrm{d}\,y} = \frac{1}{x'}$.

Уравнение преобразуется к виду

$y\,x' - 2x = y - 4y^2 \ln y$,

$x' - \frac{2}{y}x = 1 - 4y\ln y -$ линейному относительно функции $x(y)$ и ее производной $x'(y)$.

Применяем подстановку $x = u(y)\cdot v(y) \Rightarrow x' = u'v + uv'$ $(u \neq 0 \quad v \neq 0)$. Подставляя x и x' в уравнение, получаем

$$v(yu' - 2u) + y\cdot uv' = y - 4y^2 \ln y. \qquad (1)$$

Полагаем $yu' - 2u = 0 \Rightarrow \int \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{u}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}\,y}{y}$, $\quad$ ($y \neq 0$ по условию $u \neq 0$)

$\ln|u| = 2\ln|y| \Rightarrow u = y^2$.

Из (1) имеем $y^3 v' = y - 4y^2 \ln y$,

$v = \int \left(\frac{1}{y^2} - 4\,\frac{\ln y}{y} \right) \mathrm{d}\,y = -\frac{1}{y} - 2\ln^2 y + C$, где C - произвольная постоянная.

Общий интеграл исходного уравнения $x = C\,y^2 - y - 2y^2 \ln y$. $\triangleright$

Задача 7. Решить задачу Коши $y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2\left(x^3 + 1\right)\sin x, \quad y(0) = 1.$

$\triangleleft$ Это уравнение Бернулли.

Решение будем искать в виде $y = u(x)\cdot v(x)$, где $u(x), v(x)$ - некоторые неизвестные функции. Подставляя в уравнение $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$, получаем

$$u'v + uv' + \frac{3x^2 uv}{x^3 + 1} = u^2 v^2\left(x^3 + 1\right)\sin x.$$

Сгруппируем члены, содержащие v в первой степени

$$v(u' + \frac{3x^2 u}{x^3 + 1}) + uv' = u^2 v^2\left(x^3 + 1\right)\sin x. \qquad (1)$$

Примем за $u(x)$ любое отличное от нуля решение уравнения

$$u' + \frac{3x^2 u}{x^3+1} = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\ln|u| = -\ln|x^3+1|,$$

$$u = \frac{1}{x^3+1}.$$

Подставим найденную функцию в уравнение (1):

$$\frac{v'}{x^3+1} = \frac{v^2}{x^3+1}\sin x.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$-\frac{1}{v} = -\cos x + C,$$

$$v = \frac{1}{\cos x - C},$$

где C - произвольная постоянная.

Общее решение исходного уравнения $y = \dfrac{1}{(x^3+1)(\cos x - C)}$.

Из начального условия $y(0) = 1$ вычисляем $C = 0$.

Решение задачи Коши имеет вид $y = \dfrac{1}{(x^3+1)\cos x}$. ▷

Задача 8. Решить дифференциальное уравнение $y'' = x^3 + 2$.

◁ Это дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка.

Последовательно дважды интегрируя, получаем

$$y' = \int (x^3+2)dx + C_1 = \frac{x^4}{4} + 2x + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{x^4}{4} + 2x + C_1\right)dx + C_2 = \frac{x^5}{20} + x^2 + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Задача 9. Решить задачу Коши $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

$\lhd$ По условию $x \neq 0$. Уравнение не содержит явно y.

Полагаем $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'$.

Исходное уравнение принимает вид:

$z' = \dfrac{z}{x} + x \Rightarrow z' - \dfrac{z}{x} = x$ − линейное уравнение первого порядка.

Применяем подстановку $z = u \cdot v$, $z' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x. \qquad (1)$$

Решая уравнение $v' - \dfrac{v}{x} = 0$, находим частное решение $v = x$.

Подставляем $v(x)$ в уравнение (1).

Получаем $u'x = x$, $u' = 1 \Rightarrow u = x + C_1$.

Общее решение линейного уравнения

$z = u \cdot v = x(x + C_1)$ или $y' = x(x + C_1)$.

Используя начальное условие $y'(1) = 2$, вычисляем $C_1 = 1$,

т.е. $y' = x(x+1) = x^2 + x$.

Интегрируя обе части равенства, получаем

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_2.$$

Используем начальное условие $y(1) = 1$ и вычисляем $C_2 = \dfrac{1}{6}$.

Получаем искомое решение задачи Коши: $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}$. $\rhd$

Задача 10. Решить задачу Коши $y\,y'' = y' + y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

$\lhd$ Уравнение не содержит явно x.

Выполним подстановку $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot p'$.

Исходное уравнение принимает вид: $ypp' = p + p^2$.

Тогда $p(yp' - 1 - p) = 0$.

1) $p \neq 0$, так как тогда $y' = 0$, что противоречит начальному условию $y'(0) = 2$.

2) $yp' - 1 - p = 0$ − уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{1+p} = \frac{\mathrm{d}\,y}{y},$$

$\ln|1+p| = \ln|y| + \ln C_1^*$, где $C_1^* > 0$ - произвольная постоянная.

$1 + p = y \cdot C_1$, где $C_1 = \pm C_1^*$, $C_1 \neq 0$.

$1 + y' = y \cdot C_1$.

Используя начальные условия, вычислим константу C_1:

$1 + 2 = 1 \cdot C_1$, $C_1 = 3$.

Теперь $1 + y' = 3y \Rightarrow y' = 3y - 1$, $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{3y-1} = \mathrm{d}\,x$, $\dfrac{1}{3}\ln|3y-1| = x + C_2$.

Для вычисления константы C_2 вновь используем начальные условия:

$$\frac{1}{3}\ln|3 \cdot 1 - 1| = 0 + C_2, \quad C_2 = \frac{1}{3}\ln 2.$$

Запишем решение задачи Коши (частный интеграл):

$$\frac{1}{3}\ln|3y-1| = x + \frac{1}{3}\ln 2, \quad \ln|3y-1| = 3x + \ln 2. \ \triangleright$$

Задача 11. Решить дифференциальное уравнение $2y'' - y' - 3y = 0$.

$\triangleleft$ Запишем характеристическое уравнение, заменяя функцию y и ее производные y', y'' соответствующими степенями k:

$2k^2 - k - 3 = 0$.

Дискриминант $D > 0$. Корни уравнения $k_1 = -1$, $k_2 = \dfrac{3}{2}$ – действительные различные.

Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{oo}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x/2}. \ \triangleright$$

Задача 12. Решить дифференциальное уравнение $y''-18y'+81y=0$.

$\triangleleft$ Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение $k^2-18k+81=0$, дискриминант которого $D=0$.

Тогда корни уравнения $(k-9)^2=0$ есть $k_1=k_2=k=9$.

Общее решение однородного уравнения $y_{oo}=C_1e^{9x}+C_2x\cdot e^{9x}$. $\triangleright$

Задача 13. Решить задачу Коши $y''-4y'+29y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=3$.

$\triangleleft$ Характеристическое уравнение $k^2-4k+29=0$.

Так как $D<0$, то $k_{1,2}=2\pm 5i$.

Запишем общее решение исходного уравнения

$y_{oo}=C_1e^{2x}\cos 5x+C_2e^{2x}\sin 5x$.

Найдём $y'_{oo}=2e^{2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)+e^{2x}(5C_2\cos 5x-5C_1\sin 5x)$ и запишем систему для вычисления констант C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y_{oo}=C_1e^{2x}\cos 5x+C_2e^{2x}\sin 5x, \\ y'_{oo}=2e^{2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)+e^{2x}(5C_2\cos 5x-5C_1\sin 5x). \end{cases}$$

Подставим в систему начальные условия $x=0$, $y=-1$, $y'=3$:

$$\begin{cases} -1=C_1, \\ 3=2C_1+5C_2, \end{cases} \text{ откуда } C_1=-1,\ C_2=1.$$

Тогда искомое частное решение имеет вид $y=e^{2x}(\sin 5x-\cos 5x)$. $\triangleright$

Задача 14. Решить задачу Коши $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

$\triangleleft$ Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y''-2y'+y=0$.

Его характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0 \Rightarrow (k-1)^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1=k_2=k=1$.

Фундаментальная система решений этого уравнения есть функции

$y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x \cdot e^x$.

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)\, e^x + C_2(x) x \cdot e^x, \tag{1}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ − неизвестные функции.

Составим систему $\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x), \end{cases}$

где $y_1' = e^x$, $y_2' = (x+1)e^x$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) x \cdot e^x = 0, \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x)(x+1)e^x = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Сократим каждое уравнение системы на $e^x \neq 0$:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot x = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x)(x+1) = \dfrac{1}{x}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = -1,\ C_2'(x) = \frac{1}{x}.$$

Отсюда $C_1(x) = -\int \mathrm{d}\, x + \tilde{C}_1 = -x + \tilde{C}_1$,

$$C_2(x) = -\int \frac{\mathrm{d}\, x}{x} + \tilde{C}_2 = \ln|x| + \tilde{C}_2.$$

Подставляя найденные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (1), получаем общее решение неоднородного уравнения

$$y_{OH} = y_{OO} + y_{ЧН} = (-1 + \tilde{C}_1)e^x + (\ln|x| + C_2)x \cdot e^x =$$

$$= \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 x \cdot e^x - x \cdot e^x + x \cdot \ln|x| \cdot e^x$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ − произвольные постоянные.

Найдём $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$, используя начальные условия

$$\begin{cases} y(0)=1, \\ y'(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{C}_1 e+\tilde{C}_2 e-e=1, \\ \tilde{C}_1 e+2\tilde{C}_2 e-e=2 \end{cases} \Rightarrow \tilde{C}_1=1,\ \tilde{C}_2=\frac{1}{e}.$$

Частное решение исходного уравнения

$$y_{он}=e^x+\frac{1}{e}\cdot x\cdot e^x-x\cdot e^x+x\cdot\ln|x|\cdot e^x \quad \triangleright$$

Задача 15. Решить дифференциальное уравнение $y''-2y'-3y=e^{4x}$.

$\triangleleft$ Общее решение данного уравнения ищем в виде $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$, где $y_{оо}$- общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-2y'-3y=0$, $y_{чн}$- частное решение неоднородного уравнения. Характеристическое уравнение $k^2-2k-3=0$ имеет корни $k_1=3,\ k_2=-1 \Rightarrow$ $y_{оо}=C_1e^{3x}+C_2\,e^{-x}$, где C_1,C_2 - произвольные постоянные.

Правая часть неоднородного уравнения имеет специальный вид $f(x)=e^{4x}$ (см. *лекц.* 29, *табл.*1, 2а):

$P_o(x)=1 \Rightarrow n=0$;

число $\alpha=4$ не является корнем характеристического уравнения.

Частное решение будем искать в виде $y_{чн}=Ae^{4x}$,

где A – неизвестный коэффициент.

Подставляя $y_{чн}$, $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$ в исходное уравнение, получаем

$5Ae^{4x}\equiv e^{4x}$ на R.

Отсюда $A=\frac{1}{5}$.

Тогда частное решение неоднородного уравнения $y_{чн}=\frac{1}{5}e^{4x}$.

Общее решение неоднородного уравнения $y_{он}=C_1e^{3x}+C_2\,e^{-x}+\frac{1}{5}e^{4x}$. $\triangleright$

Задача 16. Решить задачу Коши

$4y''+4y'+y=-\ 5\sin 0{,}5\,x;\quad y(0)=2{,}5;\ \ y'(0)=3$.

$\triangleleft$ Общее решение данного уравнения ищем в виде $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$, где $y_{оо}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $4y'' + 4y' + y = 0$,

$y_{чн}$ - частное решение неоднородного уравнения.

Характеристическое уравнение $4k^2 + 4k + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = -\ 0{,}5$ $\Rightarrow y_{оо} = C_1 e^{-0{,}5x} + C_2 x e^{-0{,}5x}$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Правая часть неоднородного уравнения имеет специальный вид $f(x) = -\ 5\sin 0{,}5x$ (см. *лекц.* 29, *табл.*1, 3а):

$M = 0,\ N = -5,\ \beta = 0{,}5;$

число $0{,}5i$ не является корнем характеристического уравнения.

Частное решение ищем в виде

$y_{чн} = A\cos 0{,}5x + B\sin 0{,}5x$,

где A и B – неизвестные коэффициенты.

Подставляя $y''_{чн},\ y'_{чн},\ y_{чн}$ в исходное уравнение, получаем

$$4(-\ 0{,}25A\cos 0{,}5x - 0{,}25\,B\sin 0{,}5x) + 4(-\ 0{,}5\,A\sin 0{,}5x + 0{,}5B\cos 0{,}5x) +$$

$$+ (A\cos 0{,}5x + B\sin 0{,}5x) \equiv -\,5\sin\ 0{,}5x \quad \text{на} \quad R,$$

$$2B\cos 0{,}5x - 2A\sin 0{,}5x \equiv -\,5\sin 0{,}5x.$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos 0{,}5x$ и $\sin 0{,}5x$, имеем

$$\begin{array}{l|l} \cos 0{,}5x & \multirow{2}{*}{$\begin{cases} 2B = 0, \\ -\,2A = -\,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = 2{,}5. \end{cases}$} \\ \sin 0{,}5x & \end{array}$$

Тогда $y_{чн} = 2{,}5\cos 0{,}5x$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-0{,}5x} + 2{,}5\cos 0{,}5x$.

Найдем $y' = C_2\, e^{-0{,}5x} - 0{,}5 \cdot (C_1 + C_2 x)\, e^{-0{,}5x} - 1{,}25 \cdot \sin 0{,}5x.$

Для определения C_1 и C_2 используем начальные условия:

$$\begin{cases} y(0) = 2{,}5, \\ y'(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + 2{,}5 = 2{,}5, \\ C_2 - 0{,}5C_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 = 3.$$

Подставляя $C_1 = 0$, $C_2 = 3$ в общее решение неоднородного уравнения, получаем решение задачи Коши $y = 3xe^{-0,5x} + 2{,}5\cos 0{,}5x$. $\rhd$

Задача 17. Найти вид общего решения уравнения, не вычисляя неопределенных коэффициентов: $y'' - 2y' + 5y = e^x x(\sin x - 1)$.

$\lhd$ Общее решение данного уравнения ищем в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$,

где $y_{оо}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y_{чн}$ - частное решение неоднородного уравнения. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 5 = 0$ имеет корни $k_1 = 1 + 2i, k_2 = 1 - 2i \Rightarrow y_{оо} = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$,

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Преобразуем правую часть исходного уравнения

$y'' - 2y' + 5y = xe^x \sin x - xe^x$,

где $f(x) = xe^x \sin x - xe^x = f_1(x) + f_2(x)$.

Для отыскания частного решения неоднородного уравнения используем принцип суперпозиции решений (см. *лекц.* 29, *табл.* 1): $y_{чн} = y_1 + y_2$.

1) $f_1(x) = xe^x \sin x \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 1 \Rightarrow \alpha + \beta i = 1 + i \neq k_{1,2} \Rightarrow r = 0$;

$P_o(x) = 0, \ Q_1(x) = x \Rightarrow s = 1$.

Частное решение $y_1 = e^x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$,

где A, B, C, D - неизвестные коэффициенты.

2) $f_2(x) = -xe^x \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta i = 1 \neq k_{1,2} \Rightarrow r = 0$;

$P_1(x) = -x, \ Q_o(x) = 0 \Rightarrow s = 1$.

Частное решение $y_2 = (Ex + F)e^x$, где E, F - неизвестные коэффициенты.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x + ((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)e^x + (Ex + F)e^x. \ \rhd$$

Задача 18. Методом исключения найти частное решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} y' = -\ 5z, \\ z' = y + 2z, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ z(0) = 6$.

◁ Продифференцируем второе уравнение системы по x: $z'' = y' + 2z'$. Подставляя в полученное уравнение $y' = -5z$, сведём систему к одному дифференциальному уравнению второго порядка $z'' - 2z' + 5z = 0$. Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 5 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 1 \pm 2i$.

Общее решение этого уравнения

$$z = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x). \tag{1}$$

Из второго уравнения системы получаем

$$y = z' - 2z = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x (-\ 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) -$$

$$-\ 2e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$ или

$$y = e^x \big((2C_2 - C_1) \cos 2x - (2C_1 + C_2) \sin 2x\big). \tag{2}$$

Из начальных условий $y(0) = 0,\ z(0) = 6$ вычисляем $C_1 = 6,\ C_2 = 3.$

Подставляя $C_1 = 6, C_2 = 3$ в уравнения (1) и (2), получаем решение поставленной задачи Коши:

$y = -\ 15e^x \sin 2x, \quad z = 3e^x (2\cos 2x + \sin 2x)$. ▷