Задача 1. Найти область определения функции $z=\sqrt{\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}}$.

$\triangleleft$ Областью определения данной функции будет множество точек $(x;\,y)\in\mathbb{R}^2$ таких, что $\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}\ge 0$. Выполнение этого неравенства возможно в двух случаях: $\begin{cases} y\ge 0, \\ x^2+y^2-1>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y\le 0, \\ x^2+y^2-1<0. \end{cases}$

Первой системе неравенств удовлетворяют координаты всех точек, расположенных в верхней полуплоскости $y\ge 0$, вне круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=1$. Второй системе неравенств удовлетворяют координаты всех точек, расположенных в нижней полуплоскости $y\le 0$, внутри того же круга. В обоих случаях точки окружности в область определения не входят (рис. 6.1). $\triangleright$

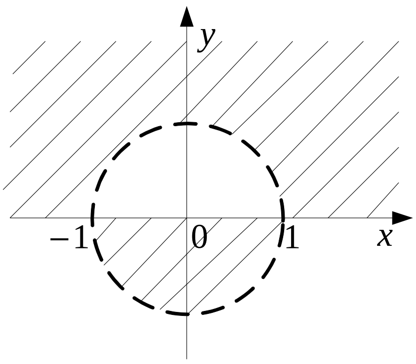


Рис. 6.1

Задача 2. Найти линии уровня функции $z=x^2+y^2$.

$\triangleleft$ Для функции $z=x^2+y^2$, графиком которой является параболоид вращения (рис. 6.2), семейством линий уровня служит множество концентрических окружностей с центром в точке $O(0;\,0)$ и сама эта точка:

$x^2+y^2=C\ \ (C=const,\,C\ge 0)$. $\triangleright$

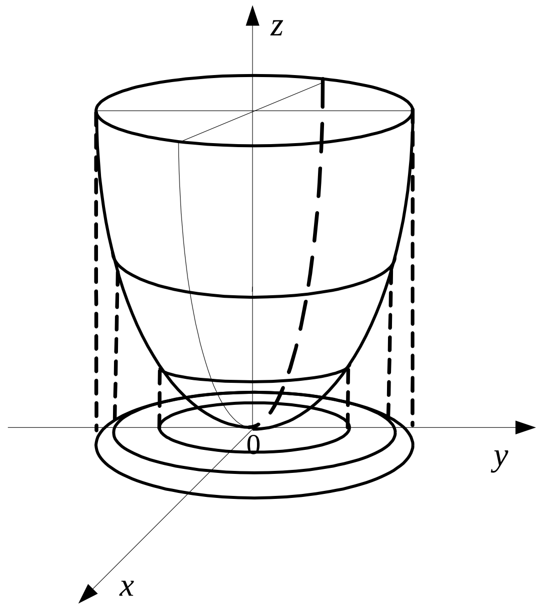


Рис. 6.2

Задача 3. Найти частные производные функции $z=2x^3-3y^2+5xy^3-e^{xy}$.

$\triangleleft$ Считая $y=const$, получим: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x^2+5y^3-ye^{xy}$. Полагая $x=const$, получим: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-6y+15xy^2-xe^{xy}$. $\triangleright$

Задача 4. Найти частные производные функции $z=x^y\ \ (x>0)$.

$\lhd$ При вычислении $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ считаем $y = const$: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^y\right)'_x = yx^{y-1}$, при вычислении $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ считаем $x = const$: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(x^y\right)'_y = x^y \ln x$. $\rhd$

Задача 5. Найти частные производные второго порядка функции $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ и доказать, что данная функция удовлетворяет уравнению Лапласа: $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

$\lhd$ Найдем частные производные первого порядка: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$. Тогда, дифференцируя повторно, имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2\left(x^2 + y^2\right) - 2x \cdot (2x)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2\left(y^2 - x^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2\left(x^2 + y^2\right) - 2y \cdot (2y)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Очевидно, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Легко заметить, что функция $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2\left(y^2 - x^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{2\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2 + 2x^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = 0. \ \rhd$$

Задача 6. Найти полный дифференциал функции $z = \ln tg(xy)$.

$\lhd$ Найдем частные производные: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{tg(xy)} \cdot \dfrac{1}{\cos^2(xy)} \cdot y = \dfrac{2y}{\sin(2xy)}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{tg(xy)} \cdot \dfrac{1}{\cos^2(xy)} \cdot x = \dfrac{2x}{\sin(2xy)}$. Тогда по формуле (6.1) полный дифференциал равен: $dz = \dfrac{2y}{\sin(2xy)} dx + \dfrac{2x}{\sin(2xy)} dy$, $dz = \dfrac{2}{\sin(2xy)}(ydx + xdy)$. $\rhd$

Задача 7. Вычислить приближенно $1{,}01^{3{,}02}$.

$\lhd$ Рассмотрим функцию $z = x^y$. Искомое число будем рассматривать как значение этой функции при $x = 1{,}01 = x_0 + \Delta x$, $y = 3{,}02 = y_0 + \Delta y$. Если $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, то $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}02$. Найдем $f(1;\, 3) = 1^3 = 1$,

$df(x;\,y) = f'_x(x;\,y)\Delta x + f'_y(x;\,y)\Delta y = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\Delta y$,

$df(1;\,3) = 3\cdot 1^2 \cdot 0{,}01 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}02 = 0{,}03$. Тогда, используя формулу (6.2), получим $f(1{,}01;\,3{,}02) = 1{,}01^{3{,}02} \approx f(1;\,3) + df(1;\,3) = 1 + 0{,}03 = 1{,}03$. $\triangleright$

Задача 8. Найти частные производные функции $z = x^y$, если $x = tgt$, $y = \sin t$.

$\triangleleft$ Найдем частные производные данных функций: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\cdot x^{y-1}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$; $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$; $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$ и воспользуемся формулой (6.3):

$$\frac{dz}{dt} = y\cdot x^{y-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 t} + x^y\cdot\ln x\cdot\cos t = \sin t\cdot tgt^{\sin t-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 t} +$$

$$+ tgt^{\sin t}\cdot\ln tgt\cdot\cos t = tgt^{\sin t}\cdot\left(\frac{1}{\cos t} + \cos t\cdot\ln tgt\right). \triangleright$$

Задача 9. Найти частные производные функции $z = e^u\cdot\sin v$, если $u = x\cdot y$, $v = x + y$.

$\triangleleft$ Найдем частные производные данных функций: $\dfrac{\partial z}{\partial u} = e^u\cdot\sin v$,

$\dfrac{\partial z}{\partial v} = e^u\cdot\cos v$; $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 1$ и подставим их в формулы (6.4): $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^u\cdot\sin v\cdot y + e^u\cdot\cos v\cdot 1 = ye^{xy}\sin(x+y) + e^{xy}\cos(x+y)$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^u\cdot\sin v\cdot x + e^u\cdot\cos v\cdot 1 = xe^{xy}\sin(x+y) + e^{xy}\cos(x+y)$. $\triangleright$

Задача 10. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $\left(x^2+y^2\right)^3 - 3\left(x^2+y^2\right) + 1 = 0$.

$\triangleleft$Обозначим $f(x;\,y) = \left(x^2+y^2\right)^3 - 3\left(x^2+y^2\right) + 1$ и найдем частные производные этой функции:

$$f'_x = 3\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2x - 3\cdot 2x = 6x\left(\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right),$$

$$f'_y = 3\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2y - 3\cdot 2y = 6y\left(\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right).$$

Тогда по формуле (6.5) получим: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{6x\left(\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right)}{6y\left(\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right)} = -\dfrac{x}{y}$. $\triangleright$

Задача 11. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x;\, y)$, заданной неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

$\lhd$ Пусть $F(x;\, y;\, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Найдем частные производные функции $F(x;\, y;\, z)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$ и по формулам (6.6) получаем: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$ всюду, где $z \neq 0$, то есть кроме точек окружности $x^2 + y^2 = 1$, расположенной в плоскости $z = 0$. $\rhd$

Задача 12. Найти производную функции $z = xy$ в точке $P(5;1)$ в направлении от точки P к точке $Q(7;\, -1)$.

$\lhd$ Найдем вектор $\bar{s} = \overline{PQ}$ и его направляющие косинусы: $\overline{PQ}\,\{2;\, -2\}$, $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$; $\cos\alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найдем частные производные функции в точке P:

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P = \left.y\right|_P = 1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P = \left.x\right|_P = 5$. Тогда по формуле (6.7):

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{s}} = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}.$$

Знак минус показывает, что функция в данной точке в данном направлении убывает. $\rhd$

Задача 13. Дана функция $z = x + xy$. Определить градиент в точке $M(-1;\, 2)$ и его модуль.

$\lhd$ Вычислим частные производные функции: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \left.(1+y)\right|_M = 3$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \left.x\right|_M = -1$. Следовательно, по формуле (6.8) градиент функции в точке $M(-1;\, 2)$ можно записать в виде: $\overrightarrow{grad\ z} = 3\vec{i} - \vec{j}$, а его модуль равен $\left|\overrightarrow{grad\ z}\right| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. $\rhd$

Задача 14. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к эллиптическому параболоиду $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$ в точке $P_0(1;-2;3)$.

$\triangleleft$Запишем уравнение поверхности в виде $F\left(x;\, y;\, z\right) = x^2 + \dfrac{y^2}{2} - z = 0.$

Тогда $F_x^{'}(x;\, y;\, z) = 2x,\ F_y^{'}(x;\, y;\, z) = y,\ F_z^{'}(x;\, y;\, z) = -1$ и, следовательно,

$F_x^{'}(P_0) = 2,\ F_y^{'}(P_0) = -2.$

Используя формулу (6.9), запишем уравнение касательной плоскости
$2(x-1) - 2(y+2) - 1(z-3) = 0$ или $2x - 2y - z - 3 = 0.$

Уравнения нормали имеют вид $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}.$

Задача 15. Исследовать на экстремум функцию $z = \dfrac{x^3}{8} + \dfrac{y^3}{27} - xy + 1.$

$\triangleleft$ Область определения функции $D_f = \mathbb{R}^2$. Находим критические точки. Для этого найдем частные производные и составим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2 - y = 0, \\ \dfrac{y^2}{9} - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{8}x^2, \\ \dfrac{x^4}{64} - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Получили две критические точки: $P_1\left(0;\, 0\right)$ и $P_2\left(4;\, 6\right)$.
Теперь каждую из них проверим на наличие в ней экстремума при помощи достаточных условий экстремума. Найдем частные производные второго порядка: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{3}{4}x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1,$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{9}y$ и вычислим значения $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_P$,

$B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_P$, $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_P$ (P - критическая точка) в точках P_1 и P_2, $\Delta = \dfrac{xy}{6} - 1.$

В точке $P_1\left(0;\, 0\right)$: $\Delta\left(P_1\right) = -1 < 0,$ следовательно, в точке P_1 функция экстремума не имеет. В точке $P_2\left(4;\, 6\right)$: $\Delta\left(P_2\right) = 4 - 1 = 3 > 0,$ и т.к. $A > 0$, то в точке P_2 функция имеет минимум, равный $z_{\min} = f(4;\, 6) = -7$. $\triangleright$

Задача 16. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области
$D = \left\{\left(x;\, y\right) \in R^2\ :\ x \le 0,\ y \le 0,\ x + y \ge -3\right\}.$

$\triangleleft$ 1) Построим область D (рис.6.5) и найдем критические точки, расположенные внутри области D:

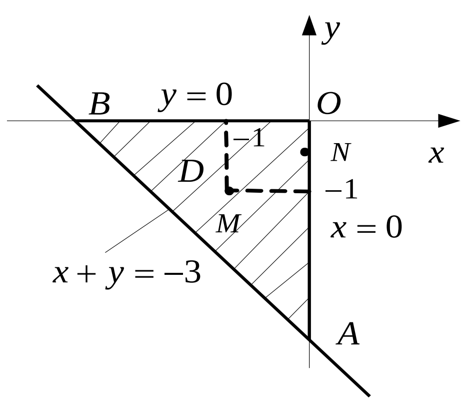


Рис. 6.5

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Получили точку $M(-1;-1)$, лежащую внутри области D и $z(M) = -1$.

2) Исследуем функцию на границе области.

а) На отрезке OA: $x = 0 \Rightarrow z(y) = y^2 + y$, $-3 \le y \le 0$. Тогда $z'(y) = 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -0{,}5 \in (-3;0)$; получаем точку $N(0;-0{,}5) \in OA$ и $z(N) = -0{,}25$.

б) На отрезке OB: $y = 0 \Rightarrow z(x) = x^2 + x$, $-3 \le x \le 0$. Тогда $z'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -0{,}5 \in (-3;0)$; получаем точку $P(-0{,}5;0) \in OB$ и $z(P) = -0{,}25$.

в) На отрезке AB: $y = -3 - x \Rightarrow$

$z(x) = x^2 + (3+x)^2 + x(3+x) + x - 3 - x = 3x^2 + 9x + 6$, $-3 \le x \le 0$. Тогда $z'(x) = 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -1{,}5 \in (-3;0)$; получаем точку $K(-1{,}5;-1{,}5) \in AB$ и $z(K) = -0{,}75$.

г) Вычислим значения функции в угловых точках области $A(0;-3)$, $B(-3;0)$ и $O(0;0)$: $z(A) = 6$, $z(B) = 6$, $z(O) = 0$.

3) Из всех найденных значений выберем теперь наибольшее и наименьшее: $z_{наиб} = z(0;-3) = z(-3;0) = 6$, $\quad z_{наим} = z(-1;-1) = -1$. ▹

Задача 17. Для чисел $z_1 = 10 + 5i$ и $z_2 = 1 - 2i$ найти: а) $2z_1 + 3z_2$; б) $\overline{z_1 - 2z_2}$; в) $i\,z_1 z_2$; г) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

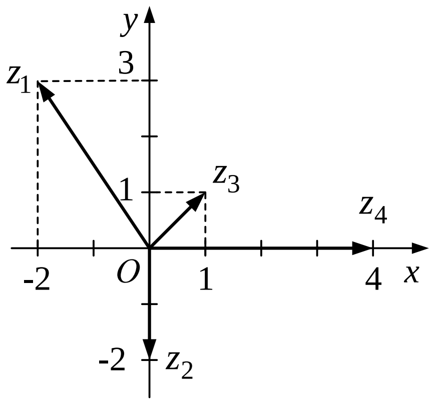
◃ а) $2z_1 + 3z_2 = 20 + 10i + 3 - 6i = 23 + 4i$;

б) $z_1 - 2z_2 = 10 + 5i - 2 + 4i = 8 + 9i \Rightarrow \overline{z_1 - 2z_2} = 8 - 9i$;

в) $i\,z_1 z_2 = i(10+5i)(1-2i) = 5i(2+i)(1-2i) = 5i(2 - 4i + i - 2i^2) =$
$= 5i(4 - 3i) = 15 + 20i$;

г) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{10+5i}{1-2i} = \dfrac{(10+5i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{10 + 20i + 5i + 10i^2}{1 - 4i^2} = \dfrac{25i}{5} = 5i$. ▹

Задача 18. На комплексной плоскости изобразить числа $z_1 = -2 + 3i$; $z_2 = -2i$; $z_3 = 1 + i$; $z_4 = 4$ векторами:



Задача 19. Представить в тригонометрической и показательной формах числа а) $z_1 = -2 + 2i\sqrt{3}$; б) $z_2 = -5$; в) $z_3 = 3i$.

◁ а) для $z_1 = -2 + 2i\sqrt{3}$ имеем: $x = -2,\ y = 2\sqrt{3}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$,

$\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Этим значениям косинуса и синуса соответствует значение аргумента $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Следовательно, тригонометрическая форма: $z_1 = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$; показательная: $z_1 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

б) для числа $z_2 = -5$: $x = -5 < 0,\ y = 0$, т.е. $z_2 \in Ox \Rightarrow \varphi = \pi$, $\rho = |z_2| = |-5| = 5$. Тогда $z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z_2 = 5e^{i\pi}$;

в) для числа $z_3 = 3i$: $x = 0,\ y = 3 > 0$, т.е. $z_3 \in Oy \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\rho = |z_3| = |3i| = 3$. Тогда $z_3 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$. ▷

Задача 20. Найти $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$, если $z_1 = 5 + 5i$, $z_2 = -|z_1|i$.

◁Число $z_1 = 5 + 5i \in \mathrm{I}$ ч. $\Rightarrow \varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$, число $z_2 = -|z_1|i \in Oy$, причем $y_2 < 0 \Rightarrow \varphi_2 = \dfrac{3\pi}{2}$. Так как $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\pi}{4} - \left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\dfrac{5}{4}\pi$, то главное значение аргумента равно: $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{3}{4}\pi$. ▷

Задача 21. Найти $z = x + iy$ из уравнения $|z + 2i| - 2i - z = 3$.

$\triangleleft$ Данное уравнение равносильно системе уравнений (используем понятие равных комплексных чисел):

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+(y+2)^2}-x=3,\\ -2-y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-2,\\ |x|-x=3\end{cases} \text{ или } y=-2,\ x=-\frac{3}{2}. \Rightarrow z=-\frac{3}{2}-2i. \triangleright$$

Задача 22. Вычислить $(1+i)^{20}$.

$\triangleleft$ Представим число $z=1+i$ в тригонометрической форме:

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда по формуле (10.1) при $n=20$ получим:

$$(1+i)^{20}=\left(\sqrt{2}\right)^{20}\cdot\left(\cos\frac{20\pi}{4}+i\sin\frac{20\pi}{4}\right)=2^{10}(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)=-1024. \triangleright$$

Задача 23. Найти $\sqrt{-1}$.

$\triangleleft$ Представим число $z=-1$ в тригонометрической форме:

$-1=1\cdot\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$. По формуле (10.2) имеем

$$\sqrt{-1}=\sqrt{1\cdot\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)}=\sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right).$$

Придавая k значения 0 и 1получим два различных значения корня:

$$w_0=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i,\quad w_1=1\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{2}\right)=-i. \triangleright$$

Задача 24. На комплексной плоскости Oxy построить множества точек, удовлетворяющих условиям:

а) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z>2$; б) $1\le|z|\le 2$.

$\triangleleft$ а) Так как $\operatorname{Re} z=x,\ \operatorname{Im} z=y,$ то неравенство примет вид $x+y>2.$ Это линейное неравенство, его геометрический образ см. на рис. а.

б) Так как $|z-z_0|=R$ − окружность с центром z_0 и радиусом R, то множество $1\le|z|\le 2$ − кольцо (рис. б) между окружностями с центрами в

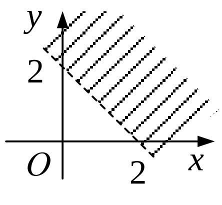


Рис.а

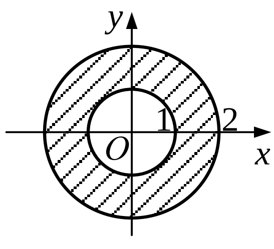


Рис.б

начале координат и радиусами $R_1=1,\ R_2=2$. $\triangleright$

Задача 25. Отделить действительную часть функции $W=iz^2+1$ от мнимой.

$\triangleleft$ Положим $z=x+iy\Rightarrow u+iv=i(x^2-y^2+2ixy)+1\Rightarrow u=-2xy+1,$

$v=x^2-y^2$, т.е. $\operatorname{Re}W=1-2xy,\quad \operatorname{Im}W=x^2-y^2. \triangleright$

Задача 26. Показать, что функция $W = \operatorname{Re} z$ не имеет производной ни в одной точке.

$\triangleleft$ Так как $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x+iy) = x,$ то для данной функции $u = x, \quad v = 0,$ и условие (10.5): $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ нигде не выполняется. $\triangleright$

Задача 27. Найти образ прямой $x = 1$ при отображении $W = z^2$.

$\triangleleft$ Отделяя в $W = z^2$ действительную часть от мнимой, получим $u + iv = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$. Следовательно, $u = x^2 - y^2, v = 2xy.$ Полагая $x = 1$, найдем $u = 1 - y^2$, $v = 2y$. Исключив y из этих уравнений, получим $u = 1 - \left(\dfrac{v}{2}\right)^2$, или окончательно $v^2 = -4(u-1)$.

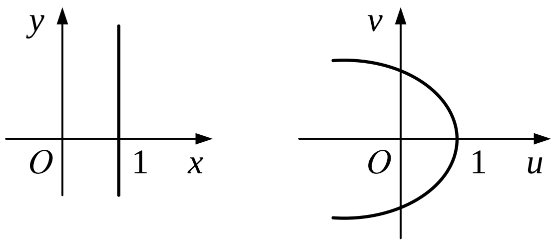
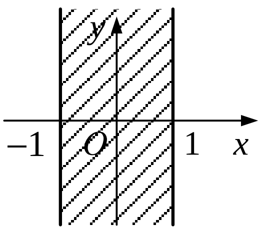
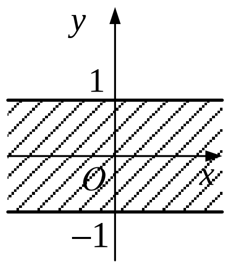
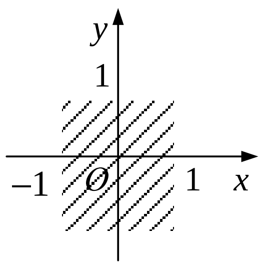


Рис.10.4

Это уравнение параболы. Следовательно, прямая $x = 1$ отобразилась в параболу (рис. 10.4). $\triangleright$

1) 

2) 

3) 

4)