1. Найти область определения функции

$$f(x) = \ln(5x + x^2 + 6).$$

◁ Областью определения функции является множество значений x, удовлетворяющих неравенству $5x + x^2 + 6 > 0$.

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = -3$. Тогда $(x+2)(x+3) > 0$. Применим метод интервалов (рис. 4.7).

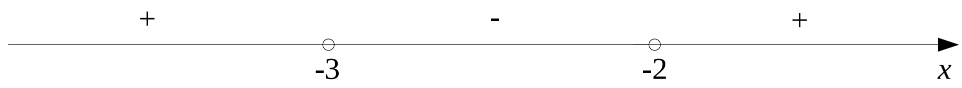

Рис. 4.7

$\Rightarrow D(f) = (-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$. ▷

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 2x^2 - 6x^3}{3x^3 - 2}$.

◁ Неопределённость вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Воспользуемся следующим правилом:

если $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ - многочлен степени n, $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ - многочлен степени m, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, \textit{ если } n < m; \\ \dfrac{a_n}{b_m}, \textit{ если } n = m; \\ \infty, \textit{ если } n > m. \end{cases}$$

Так как в рассматриваемом примере степени многочленов в числителе и знаменателе одинаковы ($n = m = 3$), то $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 2x^2 - 6x^3}{3x^3 - 2}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \dfrac{-6}{3} = -2$. ▷

3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+6x)}{\arcsin(x/2)}$.

◁ Неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно малыми при $x \to 0$: $\ln(1+6x) \sim 6x,\ \arcsin(x/2) \sim x/2$. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{\arcsin(x/2)}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{x/2} = 12.$$ ▷

4. Найти точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$.

◁ Область определения функции $D(f) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

Точкой разрыва функции является точка $x_0 = 4$, в которой функция не определена.

Так как $f(4-0) = \lim\limits_{x \to 4-0} \dfrac{x}{x-4} = -\infty$, $f(4+0) = \lim\limits_{x \to 4+0} \dfrac{x}{x-4} = +\infty$, то точка $x_0 = 4$ - точка разрыва второго рода. ▷

5. Найти значение производной функции $y = x \cdot \cos x + 2e^x$ в точке $x_0 = 0$.

◁ $y' = x' \cdot \cos x + x \cdot (\cos x)' + 2(e^x)' = 1 \cdot \cos x - x \cdot \sin x + 2e^x$, тогда $y'(0) = \cos 0 - 0 \cdot \sin 0 + 2e^0 = 1 + 2 = 3.$ ▷

6. Написать уравнение касательной к графику функции $y = 2x - arctg\, x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

◁ Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Найдем $y_0 = f(x_0) = 2 \cdot 0 - arctg\, 0 = 0$, $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{1+x^2}$,

$f'(x_0) = f'(0) = 2 - \dfrac{1}{1+0} = 1$, тогда $y = x$ - уравнение касательной. ▷

7. Тело движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + t + 1$ (x- в метрах, t - в секундах). Найти скорость тела в момент $t_0 = 6$.

◁ Скорость тела в момент времени t_0 равна $v(t_0) = x'(t_0)$. Так как $x'(t) = 2t + 1$, то $v(6) = x'(6) = 2 \cdot 6 + 1 = 13.$ ▷

8. Вычислить предел, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + x}{e^x - \cos x}$.

◁ Неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x}{e^x - \cos x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x + x)'}{(e^x - \cos x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 1}{e^x + \sin x} = \frac{2}{1} = 2. \ ▷$$

9. Вычислить предел, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x + 5x}{e^{3x} + x}$.

◁ Неопределённость вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 5x}{e^{3x} + x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x + 5x)'}{(e^{3x} + x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 5}{3e^{3x} + 1} = 0. \ ▷$$

10. Исследовать на экстремум функцию $y = (x - 5) \cdot e^x$.

◁ Область определения функции $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Найдем производную: $y'=(x-5)'\cdot e^x+(x-5)\cdot(e^x)'=e^x+(x-5)\cdot e^x=(x-4)\cdot e^x$. Решая уравнение $y'(x)=0$, найдем критическую точку: $(x-4)\cdot e^x=0 \Rightarrow$ $x=4$. Эта точка разбивает область определения на два интервала (рис. 5.2). На каждом из полученных интервалов определим знак производной.

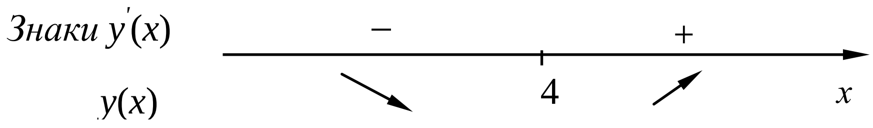

Рис. 5.2

Так как при переходе через точку $x=4$ производная меняет знак с « - » на « + », то точка $x=4$ - точка минимума функции. Найдем значение функции в точке минимума: $y_{\min}=y(4)=-e^4$. ▷

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=3x-x^3$ на отрезке $[-2;3]$.

◁ Функция непрерывна на заданном промежутке. Найдем критические точки функции:

$$f'(x)=3-3x^2. \qquad 3-3x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1,\ x_2=-1.$$

Обе критические точки принадлежат отрезку $[-2;3]$.

Вычислим значения функции в найденных критических точках:

$$f(1)=2, \quad f(-1)=-2.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f(-2)=2, \quad f(3)=-18.$$

Из полученных значений выбираем наименьшее $m=f(3)=-18$ и наибольшее $M=f(-2)=f(1)=2$. ▷

12. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции $y=x^3+5x-6$.

◁ Область определения функции $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Найдем вторую производную: $y'=3x^2+5$, $y''=6x$. Из уравнения $y''=0$, т.е. $6x=0$, получим $x_0=0$. Найденная точка разбивает область определения на два интервала (рис. 5.3). На каждом из полученных интервалов определим знак второй производной.

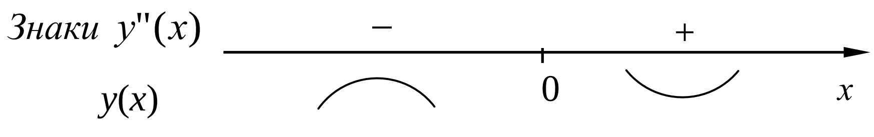

Рис. 5.3

На интервале $(-\infty; 0)$ график функции выпуклый, на интервале $(0;+\infty)$ график функции вогнутый. Так как при переходе через точку $x_0 = 0$ вторая производная меняет знак, то точка $M(0;-6)$ - точка перегиба графика функции. ▷

13. Показать, что функция $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ удовлетворяет уравнению $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

◁ Найдем y' и y'':

$$y' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} - \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x}.$$

$$y'' = \frac{\left(-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x} - \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x - \cos(\ln x) + \sin(\ln x)}{x^2} = \frac{-2\cos(\ln x)}{x^2}.$$

Подставим y, y', y'' в левую часть заданного уравнения:

$$x^2\cdot\frac{(-2\cos(\ln x))}{x^2} + x\cdot\frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x} + \sin(\ln x) + \cos(\ln x) =$$

$$= -2\cos(\ln x) + \cos(\ln x) - \sin(\ln x) + \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 0. \ \triangleright$$

14. Найти производную y''_{xx}, если функция $y = y(x)$ задана параметрически: $x = \ln t, \quad y = t^3, \quad t \in (0; +\infty)$.

◁ $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3$. Тогда $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'(t)} = \dfrac{9t^2}{\frac{1}{t}} = 9t^3$. ▷

15. Найти значение производной $y'(1)$, если

$$x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0, \quad y(1) = 1.$$

◁ Дифференцируем обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x:

$$3x^2 - 4xy^2 - 4x^2yy' + 5 + y' = 0,$$

$$(-4x^2y + 1)y' = -3x^2 + 4xy^2 - 5,$$

$$y' = \frac{-3x^2 + 4xy^2 - 5}{-4x^2y + 1}.$$

Так как $y(1) = 1$, то $y'(1) = \dfrac{-3\cdot 1^2 + 4\cdot 1\cdot 1^2 - 5}{-4\cdot 1^2\cdot 1 + 1} = \dfrac{4}{3}$. ▷

16. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = \dfrac{x+1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

◁ Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Найдем $y_0 = f(x_0) = \dfrac{-1+1}{-1} = 0,$ $\quad f'(x) = \dfrac{x-(x+1)}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2},$

$f'(x_0) = f'(-1) = -\dfrac{1}{(-1)^2} = -1$, тогда уравнение касательной $y - 0 = -(x+1)$ или $y = -x - 1$.

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow$ $y = x + 1$ - уравнение нормали. ▹

17. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^4 - 4t^3 + 5$ (x– в метрах, t– в секундах, $t_0 = 0$– начало движения). Найти ускорение (м/с^2) точки в момент её остановки.

◃ Момент остановки найдем из условия равенства нулю скорости движения точки при $t > 0$: $v(t) = x'(t) = 12t^3 - 12t^2 = 12t^2(t-1)$,
$v(t) = 0$ при $t = 1$.

Найдем ускорение точки при $t = 1$: $a(t) = v'(t) = 36t^2 - 24t$, $a(1) = 12$. ▹

18. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+0} x^x$, используя правило Лопиталя.

◃ Неопределённость вида $\left(0^0\right)$. $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x}$.

$$\lim_{x\to+0} x\ln x\,(0\cdot\infty) = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$

Находим $\lim\limits_{x\to+0} x^x = e^0 = 1$. ▹

19. Исследовать на экстремум функцию $y = (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

◃ Область определения функции $D(f) = (-\infty;+\infty)$. Найдем производную:

$$y' = (x-1)'\cdot\sqrt[3]{x^2} + (x-1)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \sqrt[3]{x^2} + (x-1)\cdot\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}.$$

Найдем критические точки:

а) $y' = 0$ в точке $x_1 = \dfrac{2}{5}$; $\quad$ б) y' не существует, если $x_2 = 0$.

Критические точки разбивают область определения на три интервала (рис. 5.4). На каждом из полученных интервалов определим знак производной.

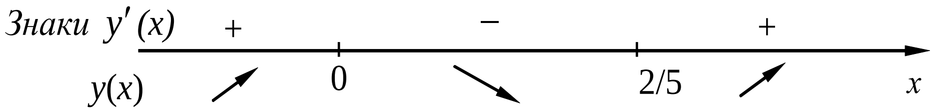

Рис. 5.4

При переходе через точку $x_1 = \dfrac{2}{5}$ производная меняет знак с « - » на « + », следовательно, точка $x_1 = \dfrac{2}{5}$ - точка минимума. Найдем значение функции в точке минимума: $y_{\min} = y\left(\dfrac{2}{5}\right) = \left(\dfrac{2}{5} - 1\right) \cdot \sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = -\dfrac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}$.

При переходе через точку $x_2 = 0$ производная меняет знак с « + » на « - », следовательно, точка $x_2 = 0$ - точка максимума. Найдем значение функции в точке максимума: $y_{\max} = y(0) = 0$. ▷

20. Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = x + e^{-x}$ на отрезке $[-1; 1]$.

◁ Функция непрерывна на заданном промежутке. Найдем критические точки функции:

$$f'(x) = 1 - e^{-x}. \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \in [-1; 1].$$

Вычислим значение функции в найденной критической точке:

$$f(0) = 0 + e^0 = 1.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f(-1) = -1 + e, \quad f(1) = 1 + e^{-1} = 1 + \frac{1}{e}.$$

Из полученных значений выбираем наименьшее $m = f(0) = 1$ и наибольшее $M = f(-1) = e - 1$. Их сумма $M + m = e - 1 + 1 = e.$ ▷

21. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

◁ Область определения функции $D(f) = (0; +\infty)$. Найдем вторую производную: $y' = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

$$y'' = \frac{(1 - \ln x)' \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot \left(x^2\right)'}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Из уравнения $y'' = 0$, т.е. $\dfrac{2\ln x - 3}{x^3} = 0$, получим $x_0 = e^{3/2}$. При переходе через точку $x_0 = e^{3/2}$ вторая производная меняет знак, следовательно, точка $M\left(e^{3/2}; \dfrac{3}{2e^{3/2}}\right)$ - точка перегиба графика функции (рис. 5.5). ▷

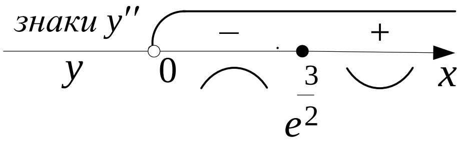

Рис. 5.5

22. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$.

$\triangleleft$ Область определения функции $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. Точка $x_0 = -1$ - точка разрыва второго рода:

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{3-2x}{x+1} = -\infty; \quad \lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \frac{3-2x}{x+1} = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3-2x}{x^2+x} = 0.$

Тогда $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3-2x}{x+1} = -2 \Rightarrow y = -2$ - горизонтальная асимптота при $x \to \pm\infty$. $\triangleright$