

### Типовые задачи

**Пример 1.** Вычислить определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 12 & 17 \\ 11 & 9 & 19 \end{vmatrix}$ ,

разложив его по элементам первой строки.

**Пример 2.** Вычислить определитель, приведя его к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

**Пример 3.** Найти матрицу  $A^T + 2B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ .

**Пример 4.** Найти произведение  $BA$  матриц  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Пример 5.** Найти  $f(A)$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ .

**Пример 6.** Найти ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Пример 7.** Найти ранг матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ .

**Пример 8.** Найти  $A^{-1}$  для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Пример 9.** Найти с помощью элементарных преобразований обратную матрицу для матрицы  $A$  из предыдущего примера.

**Пример 10.** Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Пример 11.** Решить систему 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3 \end{cases}$$

по формулам Крамера.

**Пример 12.** Решить систему из предыдущего примера матричным методом.

**Пример 13.** Найти решение системы методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

**Пример 14.** В треугольнике с вершинами  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(3; 0; 2)$  и  $C(-1; 2; 0)$  найти длину медианы  $AD$ .

**Пример 15.** Даны векторы  $\vec{a}(3; 5; 1)$  и  $\vec{b}(1; 4; 2)$ . Найти длину вектора  $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$ .

**Пример 16.** Векторы  $\vec{a}(6; m; -2)$  и  $\vec{b}(3; 2; n)$  коллинеарны. Найти значения  $m$  и  $n$ .

**Пример 17.** Точки  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(2; 1; 0)$ ,  $C(1; 2; 0)$  являются тремя последовательными вершинами параллелограмма. Найти длину диагонали  $DB$ .

**Пример 18.** Найдите скалярное произведение  $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$ , если известно, что  $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 2$  и  $(\vec{a}; \vec{b}) = 150^\circ$ .

**Пример 19.** Даны вершины треугольника  $A(-1; -2; 4)$ ,  $B(-4; -2; 0)$ ,  $C(3; -2; 1)$ . Найти:

а) внутренний угол при вершине  $B$ ;      б)  $np_{\vec{BC}}(\vec{AB} - 2\vec{AC})$ .

**Пример 20.** Найти значение  $k$ , при котором векторы  $\vec{a}(k; -3; 2)$  и  $\vec{b}(1; 2; -k)$  перпендикулярны.

**Пример 21.** При каких значениях  $m$  угол между векторами  $\vec{a}(7; -1; 2m)$  и  $\vec{b}(-2; 4m; 1)$  острый.

**Пример 22.** Найти длину высоты параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{AB}(4; -5; -2)$  и  $\vec{AD}(2; -1; 2)$ , опущенную из вершины  $B$ .

**Пример 23.** Найти объем треугольной пирамиды с вершинами  $A(0; 0; 1)$ ,  $B(2; 3; 5)$ ,  $C(6; 2; 3)$ ,  $D(3; 7; 2)$ .

**Пример 24.** Даны векторы  $\vec{a} = (0; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (2; -3; -2)$ ,  $\vec{c} = (-2; 4; 3)$ . Требуется установить, компланарны ли данные векторы. В случае их некомпланарности выяснить, какую тройку (правую или левую) они образуют, и вычислить объем построенного на них параллелепипеда.

**Пример 25.** Даны координаты вершин:  $A(1; 4)$ ,  $B(-2; 1)$ ,  $C(2; 1)$ . Найти общее уравнение: 1) стороны  $AB$ ; 2) высоты  $BH$ .

**Пример 26.** Найти угловой коэффициент прямой, заданной общим уравнением  $2x - 3y + 6 = 0$ .

**Пример 27.** Найти точку  $A$  пересечения прямых  $14x - 9y - 24 = 0$ ,  $7x - 2y - 17 = 0$ .

**Пример 28.** При каких значениях  $c$  прямые  $L_1 : (c + 1)x + (3 - c)y + 16 = 0$  и  $L_2 : (c - 3)x + (2c - 3)y + 6 = 0$  взаимно перпендикулярны?

**Пример 29.** Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ .

**Пример 30.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(2; -2)$  и касающейся окружности  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ .

**Пример 31.** Составить каноническое уравнение эллипса ( $a > b$ ), проходящего через точки  $M_1\left(4; \frac{12}{5}\right)$  и  $M_2\left(-3; -\frac{16}{5}\right)$ . Найти его эксцентриситет, координаты фокусов.

**Пример 32.** Составить уравнение гиперболы следующего вида  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  и проходящей через точку  $M(9; 8)$ , если уравнения асимптот гиперболы имеют вид  $y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}x$ . Найти эксцентриситет и координаты фокусов.

**Пример 33.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(1; -1; 0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{N}(-2; 3; 1)$ .

**Пример 34.** Составить уравнение плоскости  $P$ , проходящей через точки  $M_1(0; 1; 5)$ ,  $M_2(3; 0; 1)$  и  $M_3(-1; 1; 2)$ .

**Пример 35.** Найти угол между плоскостями  $P_1 : -3y + z + 1 = 0$  и  $P_2 : 2y + z - 3 = 0$ .

**Пример 36.** Найти расстояние от точки  $M_0(1; -1; 1)$  до плоскости  $P : 2x - 3y + 6z - 25 = 0$ .

**Пример 37.** Составить различные уравнения прямой  $L$ , проходящей через точку  $M_0(3; 2; -1)$  и параллельной вектору  $\vec{a}(2; -1; 5)$ .

**Пример 38.** Найти угол между плоскостью  $P : \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2z + 1 = 0$  и

прямой  $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{\sqrt{2}} = \frac{z}{1}$ .

**Пример 39.** Записать канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 8 = 0, \\ x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

**Пример 40.** Найти угол между прямыми  $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$  и  $L_2: x = -2t + 1, y = t - 2, z = t - 1, t \in \mathbb{R}$ .

**Пример 41.** Найти координаты точки  $M_1$  пересечения плоскости  $P: 2x + 3y - 5z + 1 = 0$  и прямой  $L: \frac{x-5}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ .