Решение типовых задач

Пример 1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 12 & 17 \\ 11 & 9 & 19 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первой строки.

$$\lhd\ \Delta = 3\begin{vmatrix} 12 & 17 \\ 9 & 19 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 11 & 19 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} = -26. \rhd$$

Пример 2. Вычислить определитель, приведя его к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

$\lhd$ Обозначим $j-$тую строку определителя S_j. Тогда, используя свойство 2 определителей, получим треугольный вид определителя, значение которого равно произведению элементов главной диагонали:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} S_2 - S_1 \\ = \\ S_3 - S_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = \\ S_3 - 5S_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = -12. \rhd$$

Пример 3. Найти матрицу $A^T + 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$$\lhd\ A^T + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T + 2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+10 & 3+12 \\ 2+14 & 4+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 16 & 20 \end{pmatrix}. \quad \rhd$$

Пример 4. Найти произведение BA матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\lhd$ Произведение BA существует, так как матрица B имеет размер 3×2, а матрица A имеет размер 2×2, т.е. число столбцов матрицы B совпадает с числом строк матрицы A.

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 + 7\cdot 1 & 4\cdot 5 + 7\cdot 0 \\ 1\cdot 2 + 8\cdot 1 & 1\cdot 5 + 8\cdot 0 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot 5 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 10 & 5 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}. \ \rhd$$

Пример 5. Найти $f(A)$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2+2x-3.$

$\lhd$ Под $f(A)$ подразумевается матрица вида $f(A)=A^2+2A-3E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Тогда $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

$2A-3E=2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$,

$f(A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$. $\rhd$

Пример. 6. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

$\lhd$ Любой минор 3-го порядка матрицы будет нулевым, так как у матрицы A пропорциональны вторая и третья строки. Наивысший порядок ненулевого минора $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}\neq 0$ равен 2. Следовательно, $rangA=2.$ $\rhd$

Пример 7. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ -1 & -2 & -3 & -4\end{pmatrix}$.

$\lhd$ Производя последовательно элементарные преобразования будем иметь:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ -1 & -2 & -3 & -4\end{pmatrix}\overset{S_3+S_1}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{S_2-5\cdot S_1}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & -8 & -12\end{pmatrix}=B.$$

Матрицы A и B эквивалентны: $A\sim B$**.** Так как ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях, то $rangA=rangB=r=2.$ $\rhd$

Пример 8. Найти A^{-1} для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

$\lhd$ 1) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$ Следовательно, A^{-1} существует.

2) Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ \ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,\ \ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ \ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ \ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,\ \ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Тогда присоединенная матрица имеет вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Транспонируем присоединенную матрицу: $\left(\tilde{A}\right)^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

4) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\left(\tilde{A}\right)^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5) Проверка: $A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ $\rhd$

Пример 9. Найти с помощью элементарных преобразований обратную матрицу для матрицы A из предыдущего примера.

$\lhd$ $\quad (A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{S_3 - S_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$$\begin{array}{c} S_1+S_3 \\ \sim \\ S_2-2\cdot S_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} S_1-S_2 \\ \sim \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \triangleright$$

Пример 10. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$ Пусть $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $\det B=10, \det A=1.$

Данное уравнение перепишем в виде $BX\,A=C$, где $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда $B^{-1}BX\,A\,A^{-1}=B^{-1}CA^{-1}$ или $X=B^{-1}CA^{-1}$.

Так как $B^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, а A^{-1} найдена в примере 8, то

$$X=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -7 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -4 & -6 & 3 \\ -8 & -2 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}4 & -0{,}6 & 0{,}3 \\ -0{,}8 & -0{,}2 & 1{,}1 \end{pmatrix}. \triangleright$$

Пример 11. Решить систему $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-1, \\ -3x_1-2x_2+2x_3=1, \\ x_1+4x_2-7x_3=-3 \end{cases}$ по формулам Крамера.

$\triangleleft$ Так как $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}=3\neq 0,$ то система имеет единственное решение. Найдем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \end{vmatrix} = -3;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 9;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

По формулам Крамера, получим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2. \quad \triangleright$$

Пример 12. Решить систему из предыдущего примера матричным методом.

$$\triangleleft\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$ Найдем A^{-1}. $\det A = \Delta = 3 \neq 0$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -19, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Поэтому $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -19 & -13 & -1 \\ -10 & -7 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда по формуле $X = A^{-1}B$:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -19 & -13 & -1 \\ -10 & -7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6+3+0 \\ 19-13+3 \\ 10-7+3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -1,\quad x_2 = 3,\quad x_3 = 2. \triangleright$$

Пример 13. Найти решение системы методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

$\lhd$ **1)** Запишем расширенную матрицу системы: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$. Считая ведущим элементом $a_{11} = 1$, с помощью элементарных преобразований получим ниже него нули. Для этого отнимем от второй строки первую, умноженную на 2, а от третьей строки – первую, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2-1\cdot 2 & -1-1\cdot 2 & 3-(-1)\cdot 2 & 7-0\cdot 2 \\ 3-1\cdot 3 & 2-1\cdot 3 & 1-(-1)\cdot 3 & 7-0\cdot 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 - 2S_1 \\ \sim \\ S_3 - 3S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim$$

Для того, чтобы на месте следующего ведущего элемента a_{22} получить единицу, поменяем местами вторую и третью строки, а затем элементы новой второй строки умножим на (-1):

$$\begin{array}{c} S_2 \rightleftarrows S_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1)\cdot S_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -3 & 5 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_3 + 3S_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{c} \left(-\frac{1}{7}\right) S_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

Матрица системы приведена к треугольному виду. Система имеет единственное решение ($rangA = rang(A\,|\,B) = n = 3$), которое можно получить, если выписать систему, соответствующую последней расширенной матрице.

Но мы получим решение системы, применяя модифицированный метод Гаусса $-$Жордана, т.е. будем получать нули не только ниже, но и выше диагональных элементов. Для этого проведем следующие преобразования

$$\begin{array}{c} S_1 + S_3 \\ \sim \\ S_2 + 4S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_1 - S_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$ $\rhd$

2) Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 - S_1 \\ \sim \\ S_3 + 2\cdot S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_3 - 2\cdot S_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как $rangA = rang(A\,|\,B) = 2 < 3 = n$, то система совместная и неопределенная (т.е. имеет бесконечно много решений). Ненулевым элементам главной диагонали полученной ступенчатой матрицы соответствуют переменные x_1, x_2. Они являются базисными, переменную x_3 назовем свободной. Исходная система эквивалентна системе следующего вида:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}.$$

Найдем общее решение системы. Придадим свободной неизвестной x_3 произвольное значение t. В результате получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - t = -4, \\ x_2 - 2t = 4. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_2 = 4 + 2t,\ t \in \mathbb{R}.$ Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение получим, что $x_1 = -t - 8,\ t \in \mathbb{R}.$

В результате общее решение системы: $(-t-8; 2t+4; t),\ t \in \mathbb{R}.$ Частное решение системы получим, например, при $t = 0$: $(-8; 4; 0)$. ▷

3) Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \underset{S_3 + 2\cdot S_1}{\overset{S_2 - S_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) \underset{S_3 - 2\cdot S_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Так как $rangA = 2 \neq 3 = rang(A \mid B)$, то система несовместная (не имеет решений). В самом деле, последней строке полученной расширенной матрицы соответствует уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -13$, не имеющее решений. ▷

Пример 14. В треугольнике с вершинами $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(3;\ 0;\ 2)$ и $C(-1;\ 2;\ 0)$ найти длину медианы AD.

◁ Находим координаты точки D - середины отрезка BC:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1; \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+2}{2} = 1; \quad z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1.$$

Тогда длина медианы AD равна:

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (1+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}. ▷$$

Пример 15. Даны векторы $\vec{a}(3;\ 5;\ 1)$ и $\vec{b}(1;\ 4;\ 2)$. Найти длину вектора $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$.

◁ Используя правила сложения векторов и умножения вектора на число, найдем: $3\vec{b} = (3;\ 12;\ 6)$; $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b} = (3;\ 5;\ 1) - (3;\ 12;\ 6) = (0;\ -7; -5)$. Тогда получаем $|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + (-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{74}$. ▷

Пример 16. Векторы $\vec{a}(6;\ m;\ -2)$ и $\vec{b}(3;\ 2;\ n)$ коллинеарны. Найти значения m и n.

$\lhd$ Из условия коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует: $\frac{6}{3}=\frac{m}{2}=\frac{-2}{n}\Rightarrow$ $\frac{m}{2}=\frac{6}{3}$ и $\frac{-2}{n}=\frac{6}{3}$ $\Rightarrow m=4$ и $n=-1$. Так как $\frac{a_x}{b_x}=\frac{6}{3}>0$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. $\rhd$

Пример 17. Точки $A(1;\ 0;\ 2)$, $B(2;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 2;\ 0)$ являются тремя последовательными вершинами параллелограмма. Найти длину диагонали DB.

$\lhd$ Для параллелограмма имеет место равенство $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$, тогда $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$. Находим координаты векторов $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{CB}(2-1;\ 1-2;\ 0-0)\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}(1;\ -1;\ 0)$; $\overrightarrow{AB}\,(2-1;\ 1-0;\ 0-2)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\,(1;\ 1;\ -2)$. Из равенства $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$ получаем координаты вектора $\overrightarrow{DB}\,(2;\ 0;\ -2)$, а его длина $\left|\overrightarrow{DB}\right|=2\sqrt{2}$. $\rhd$

Пример 18. Найдите скалярное произведение $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$, если известно, что $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right|=2$ и $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=150^0$.

$\lhd$ Используя свойства скалярного произведения и определение, получаем: $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=2\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{b}=$

$$=2\vec{a}^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2=2|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos 150^0-2\left|\vec{b}\right|^2=$$

$$=2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-3\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos 150^o-2\cdot 2^2=6+9-8=7.\ \rhd$$

Пример 19. Даны вершины треугольника $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Найти:

а) внутренний угол при вершине B; б) $np_{\overline{BC}}\left(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right)$.

$\lhd$ а) Чтобы найти угол при вершине B, рассмотрим два вектора, имеющие начало в точке B: $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Так как $\overrightarrow{BA}=(3;0;4)$, $\overrightarrow{BC}=(7;0;1)$, то используя формулу $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}$, получим

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{3\cdot 7+1\cdot 4}{\sqrt{9+16}\,\sqrt{50}}=\frac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\angle B=45^0.$$

б) $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=(-3;0;-4)-2(4;0;-3)=(-11;0;\ 2)$. Следовательно,

$$np_{\overline{BC}}\left(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right)=\frac{7(-11)+0+2\cdot 1}{\sqrt{50}}=-\frac{75}{5\sqrt{2}}=-\frac{15\sqrt{2}}{2}.\ \rhd$$

Пример 20. Найти значение k, при котором векторы $\vec{a}(k;-3;2)$ и $\vec{b}(1;2;-k)$ перпендикулярны.

$\triangleleft$ Из условия перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow$ $k\cdot 1+(-3)\cdot 2+2\cdot(-k)=0 \Leftrightarrow k=-6$. $\triangleright$

Пример 21. При каких значениях m угол между векторами $\vec{a}(7;-1;2m)$ и $\vec{b}(-2;4m;1)$ острый.

$\triangleleft$ Так как угол между заданными векторами острый, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ или $7\cdot(-2)+(-1)\cdot 4m+2m\cdot 1>0$. Откуда $m<-7$. $\triangleright$

Пример 22. Найти длину высоты параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(4;-5;-2)$ и $\overrightarrow{AD}(2;-1;2)$, опущенную из вершины B.

$\triangleleft$ Пусть BH - высота параллелограмма, опущенная из вершины B. Тогда площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равна $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BH}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|$, откуда $\left|\overrightarrow{BH}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}$.

Воспользовавшись формулой для нахождения векторного произведения векторов, находим

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & -2\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-5 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}4 & -5\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$=-12\vec{i}-12\vec{j}+6\vec{k}$. Из геометрического смысла векторного произведения получаем $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{144+144+36}=\sqrt{324}=18$. Находим длину вектора $\overrightarrow{AD}$: $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{4+1+4}=3$ и длину высоты параллелограмма, опущенной из вершины B: $\left|\overrightarrow{BH}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\dfrac{18}{3}=6$. $\triangleright$

Пример 23. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$.

$\triangleleft$ Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}(2;3;4)$, $\overrightarrow{AC}(6;2;2)$, $\overrightarrow{AD}(3;7;1)$ и вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, используя формулу для нахождения смешанного произведения векторов через их координаты.

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}2&3&4\\6&2&2\\3&7&1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2&2\\7&1\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}6&2\\3&1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}6&2\\3&7\end{vmatrix}=$$

$$=2(2-14)-3(6-6)+4(42-6)=-24-0+144=120.$$

Воспользуемся формулой $V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$ для нахождения объема пирамиды $ABCD$: $V_{пир}=\frac{1}{6}\cdot\left|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot 120=20$ (куб. ед.). ▷

Пример 24. Даны векторы $\vec{a}=(0;\ 2;\ 1)$, $\vec{b}=(2;-3;-2)$, $\vec{c}=(-2;\ 4;\ 3)$. Требуется установить, компланарны ли данные векторы. В случае их некомпланарности выяснить, какую тройку (правую или левую) они образуют, и вычислить объем построенного на них параллелепипеда.

◁ Вычислим смешанное произведение:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}0&2&1\\2&-3&-2\\-2&4&3\end{vmatrix}=-2.$$

Из значения смешанного произведения следует, что векторы некомпланарны, образуют левую тройку и $V=\left|-2\right|=2$ (куб. ед.). ▷

Пример 25. Даны координаты вершин ΔABC: $A(1;\ 4)$, $B(-2;1)$, $C(2;\ 1)$. Найти общее уравнение: 1) стороны AB; 2) высоты BH .

◁ 1. За направляющий вектор прямой AB можно взять вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(-3;-3)$ (рис.1). Далее, так как точка $A\in AB$, то каноническое уравнение прямой AB имеет вид: $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-4}{-3}$. Из последнего уравнения имеем $x-1=y-4\Rightarrow x-y+3=0$ – общее уравнение прямой AB.

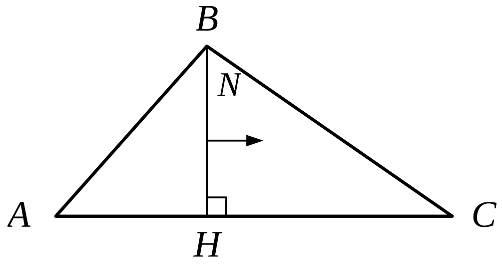

Рис 1

2. За нормальный вектор прямой BH можно выбрать вектор $\overrightarrow{AC}(1;-3)$. Тогда уравнение прямой, проходящей через точку $B(-2;\ 1)$ с заданным нормальным вектором, имеет вид BH: $1\cdot(x+2)-3(y-1)=0$ или $x-3y+5=0$ – общее уравнение прямой BH . ▷

Пример 26. Найти угловой коэффициент прямой, заданной общим уравнением $2x-3y+6=0$.

◁ Выразим из этого уравнения у. Тогда $y=\frac{2}{3}x+2$ *и* $k=\frac{2}{3}$. ▷

Пример 27. Найти точку A пересечения прямых $14x-9y-24=0$, $7x-2y-17=0$.

⊲ Так как искомая точка лежит на каждой из двух прямых, то координаты этой точки удовлетворяют каждому из уравнений. Таким образом, координаты точки пересечения прямых находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} 7x-2y-17=0, \\ 14x-9y-24=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что $A(3;\ 2)$ – искомая точка. ⊳

Пример 28. При каких значениях c прямые $L_1:(c+1)x+(3-c)y+16=0$ и $L_2:(c-3)x+(2c-3)y+6=0$ взаимно перпендикулярны?

⊲ Прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями, тогда их нормальные векторы имеют координаты: $\overrightarrow{N}_1(c+1;\ 3-c)$, $\overrightarrow{N}_2(c-3;\ 2c-3)$. Если $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N}_1 \perp \overrightarrow{N}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N}_1 \cdot \overrightarrow{N}_2 = 0 \Leftrightarrow$

$(c+1)(c-3)+(3-c)(2c-3)=0 \Leftrightarrow c^2-7c+12=0 \Rightarrow c_1=3;\ c_2=4.$ ⊳

Пример 29. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-8x+6y=0$.

⊲ Приведем уравнение окружности к каноническому виду, выделяя полные квадраты в левой части уравнения:

$$\left(x^2-2\cdot4\cdot x+4^2\right)-4^2+\left(y^2+2\cdot3\cdot y+3^2\right)-3^2=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y+3)^2=16+9 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y+3)^2=5^2$. Сравнивая полученное уравнение с каноническим уравнением окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, получаем координаты центра окружности $C(4;-3)$ и радиус $R=5$. ⊳

Пример 30. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(2;-2)$ и касающейся окружности $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

⊲ Центр окружности находится в точке $C(-1;\ 2)$. Проверим, проходит ли окружность через точку M: $(2+1)^2+(-2-2)^2=9+16=25$. Так как координаты точки M удовлетворяют уравнению окружности, то точка M лежит на ней. Тогда вектор $\overrightarrow{CM}(-3;4)$ будет нормальным для касательной. Запишем уравнение касательной, проходящей через точку M:

$-3(x-2)+4(y+2)=0 \Leftrightarrow -3x+4y+14=0$. ⊳

Пример 31. Составить каноническое уравнение эллипса ($a>b$), проходящего через точки $M_1\left(4;\ \dfrac{12}{5}\right)$ и $M_2\left(-3;-\dfrac{16}{5}\right)$. Найти его эксцентриситет, координаты фокусов.

$\lhd$ Искомое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Так как эллипс проходит через точки M_1 и M_2, то координаты точек должны удовлетворять уравнению эллипса: $\begin{cases}\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{144}{25b^2}=1,\\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{256}{25b^2}=1.\end{cases}$

Пусть $\dfrac{1}{a^2}=t;\ \dfrac{16}{25b^2}=z$, тогда получаем систему $\begin{cases}16t+9z=1,\\ 9t+16z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1/25,\\ z=1/25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=25,\\ b^2=16.\end{cases}$

Искомое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Находим $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$. Эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, тогда $\varepsilon=\dfrac{3}{5}$, координаты фокусов $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$. $\rhd$

Пример 32. Составить уравнение гиперболы следующего вида $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и проходящей через точку $M(9;\,8)$, если уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x$. Найти эксцентриситет и координаты фокусов.

$\lhd$ Уравнение гиперболы имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (точка M лежит ниже прямой $y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x$). Так как точка M лежит на гиперболе, и учитывая, что уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y=\pm\dfrac{b}{a}x$, получаем систему уравнений: $\begin{cases}\dfrac{9^2}{a^2}-\dfrac{8^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{81}{a^2}-\dfrac{64}{b^2}=1,\\ b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{81}{a^2}-\dfrac{64\cdot 9}{8a^2}=1,\\ b^2=\dfrac{8}{9}a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=9,\\ b^2=8.\end{cases}$

Искомое уравнение гиперболы имеет вид $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{8}=1$. Находим

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+8}=\sqrt{17}$. Тогда эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$, а координаты фокусов $F_1\left(-\sqrt{17};\ 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{17};\ 0\right)$. ▷

Пример 33. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;\ -1;\ 0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}(-2;\ 3;\ 1)$.

◁ Воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через заданную точку M_0 с заданным нормальным вектором $\vec{N}$, получаем $-2(x-1)+3(y+1)+1(z-0)=0$ или $2x-3y-z-5=0$. ▷

Пример 34. Составить уравнение плоскости P, проходящей через точки $M_1(0;1;5)$, $M_2(3;0;1)$ и $M_3(-1;1;2)$.

◁ Находим координаты векторов $\overrightarrow{M_1M_2}(3;-1;-4)$, $\overrightarrow{M_1M_3}(-1;0;-3)$ и определяем координаты нормального вектора $\vec{N}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$ плоскости P:

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 0 & -3\end{vmatrix}=3\vec{i}+13\vec{j}-\vec{k}.$$

Зная координаты нормального вектора и выбрав точку M_1, записываем уравнение плоскости $P:\ 3(x-0)+13(y-1)-1(z-5)=0$ или $P:\ 3x+13y-z-8=0$. ▷

Пример 35. Найти угол между плоскостями $P_1:\ -3y+z+1=0$ и $P_2:\ 2y+z-3=0$.

◁ Нормальные векторы плоскостей P_1 и P_2 имеют координаты: $\vec{N}_1(0;-3;1)$, $\vec{N}_2(0;2;1)$. Так как $\left|\vec{N}_1\right|=\sqrt{10}$, $\left|\vec{N}_2\right|=\sqrt{5}$, а скалярное произведение $\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=0-3\cdot2+1\cdot1=-5$, то получаем:

$$\cos\varphi=\frac{\left|\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2\right|}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{|-5|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$ Откуда $\varphi=45^o$. ▷

Пример 36. Найти расстояние от точки $M_0(1;-1;1)$ до плоскости $P: 2x-3y+6z-25=0$.

◁ Воспользуемся формулой нахождения расстояния от заданной точки до плоскости, получим

$$\rho(M_0,P)=\frac{|2\cdot1-3(-1)+6\cdot1-25|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{|-14|}{\sqrt{49}}=\frac{14}{7}=2.$$ ▷

Пример 37. Составить различные уравнения прямой L, проходящей через точку $M_0(3;\ 2;\ -1)$ и параллельной вектору $\vec{a}(2;\ -1;\ 5)$.

$\triangleleft$Составим канонические уравнения L: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{5}$. Зная канонические уравнения L, запишем ее параметрические уравнения: $x=2t+3,\ y=-t+2,\ z=-5t-1,\ t\in R$. Из канонических уравнений легко получить общие уравнения прямой: $\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{-1},\\ \dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}x+2y-7=0,\\ 5y+z-9=0.\end{cases}$ $\triangleright$

Пример 38. Найти угол между плоскостью $P:\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2z+1=0$ и прямой $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{\sqrt{2}}=\dfrac{z}{1}$.

$\triangleleft$ Нормальный вектор плоскости P: $\vec{N}\left(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ -2\right)$, направляющий вектор прямой L : $\vec{a}\left(1;\sqrt{2};1\right)$, φ - угол между P и L. Тогда

$$\sin\varphi=\frac{\left|\sqrt{2}+2-2\right|}{\sqrt{2+2+4}\sqrt{1+2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{4};\ \varphi=\arcsin\frac{1}{4}.\ \triangleright$$

Пример 39. Записать канонические уравнения прямой

$$\begin{cases}2x-3y+z+8=0,\\ x+y-z-1=0.\end{cases}$$

$\triangleleft$ В качестве направляющего вектора $\vec{a}$ прямой L можно взять вектор $\vec{a}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}$, где $\overrightarrow{N_1}(2;\ -3;\ 1)$, $\vec{N}_2(1;\ 1;\ -1)$ - нормальные векторы плоскостей:

$$\vec{a}=\vec{N}_1\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}.$$

Чтобы найти координаты точки $M_0\in L$, положим $z_0=0$ и, решив систему $\begin{cases}2x-3y+8=0\\ x+y-1=0\end{cases}$, получим $x_0=-1,\ y_0=2$. Зная координаты точки $M_0(-1;\ 2;\ 0)$ и направляющего вектора $\vec{a}(2;\ 3;\ 5)$, записываем канонические уравнения прямой $L:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{5}$. $\triangleright$

Пример 40. Найти угол между прямыми $L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$ и $L_2:\ x=-2t+1,\ y=t-2,\ z=t-1,\ t\in\mathbb{R}$.

$\lhd$ Угол φ между прямыми L_1 и L_2 равен углу между направляющими векторами этих прямых. Направляющие векторы прямых L_1 и L_2 задаются координатами $\vec{a}_1(2;\,-2;\,6)$ и $\vec{a}_2(-2;1;1)$ соответственно. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{|\,\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\,|}{|\,\vec{a}_1\,|\,|\,\vec{a}_2\,|}=\frac{\left|2\cdot(-2)+(-2)\cdot 1+6\cdot 1\right|}{\sqrt{4+4+36}\,\sqrt{4+1+1}}=0\Rightarrow\ \varphi=90^{o}.\ \rhd$$

Пример 41. Найти координаты точки M_1 пересечения плоскости $P:\ 2x+3y-5z+1=0$ и прямой $L: \dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{2}$.

$\lhd$ Запишем параметрические уравнения прямой

$$L:\begin{cases}x=3t+5,\\ y=t+4,\\ z=2t+5,\quad t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Так как каждой точке прямой L соответствует некоторое значение параметра t, то обозначим через t_1 значение параметра, соответствующее точке M_1. Тогда координаты точки M_1 запишутся:

$$\begin{cases}x_1=3t_1+5,\\ y_1=t_1+4,\\ z_1=2t_1+5.\end{cases}$$

Так как точка $M_1\in P$, то ее координаты должны удовлетворять уравнению плоскости $P: 2(3t_1+5)+3(t_1+4)-5(2t_1+5)+1=0$. Разрешая последнее уравнение относительно t_1, получим $t_1=-\,2$. Из параметрических уравнений прямой L, находим координаты точки $M_1(-1;\,2;1)$. $\rhd$