Решение типовых задач к модулю 4

Задача 1. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2 - 3x\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x}} dx$.

$\triangleleft$ Поделим числитель подынтегральной дроби на знаменатель и используем свойство линейности неопределенного интеграла:

$$\int \frac{x^2 - 3x\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x + 5x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx - 3\int x\,dx + 5\int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} - 3\frac{x^{1+1}}{1+1} + 5\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{3}{2}x^2 + 10\sqrt{x} + C. \triangleright$$

Задача 2. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{1-10x}$.

$$\triangleleft \int \frac{dx}{1-10x} = \begin{vmatrix} u = 1-10x \\ du = -10dx \end{vmatrix} = -\frac{1}{10}\int \frac{(-10)dx}{1-10x} = -\frac{1}{10}\int \frac{du}{u} =$$

$$= -\frac{1}{10}\ln|u| + C = -\frac{1}{10}\ln|1-10x| + C. \triangleright$$

Задача 3. Найти неопределенный интеграл $\int (x^2+1)e^{-x} dx$.

$$\triangleleft \int (x^2+1)e^{-x} dx = \begin{vmatrix} u = x^2+1, & du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x}\cdot(x^2+1) +$$

$$+2\int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{vmatrix} == -e^{-x}\cdot(x^2+1) + 2\cdot\left(-x\cdot e^{-x} + \right.$$

$$\left. + \int e^{-x}dx\right) = -e^{-x}\cdot(x^2+1) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2+2x+3) + C. \triangleright$$

Задача 4. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{5x+2}{x^2+6x+13} dx$.

$\triangleleft$ Сделаем замену $t = \frac{1}{2}\cdot(x^2+6x+13)' = x+3$.

Тогда исходный интеграл можно представить в виде:

$$\int \frac{5x+2}{x^2+6x+13} dx = \begin{vmatrix} t = x+3 \\ x = t-3 \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{(5\cdot(t-3)+2)dt}{(t-3)^2 + 6\cdot(t-3) + 13} =$$

$$= \int \frac{(5t-15+2)dt}{t^2-6t+9+6t-18+13} = \int \frac{(5t-13)dt}{t^2+4} = 5\int \frac{t\,dt}{t^2+4} - 13\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left(t^2+4\right)-\frac{13}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{5}{2}\ln\left(x^2+6x+13\right)-\frac{13}{2}arctg\frac{x+3}{2}+C\text{.}\triangleright$$

Задача 5. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)\sqrt{x+3}}$.

$\triangleleft$ Применим подстановку $\sqrt[4]{x+3}=t$:

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)\sqrt{x+3}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt[4]{x+3}=t\\ x=t^4-3\\ dx=4t^3\,dt\end{array}\right|=4\int\frac{t^3dt}{(t-1)t^2}=4\int\frac{tdt}{t-1}=4\int\frac{(t-1)+1}{t-1}dt=$$

$$=4\left(t+\ln|t-1|\right)+C=4\left(\sqrt[4]{x+3}+\ln\left|\sqrt[4]{x+3}-1\right|\right)+C\text{.}\triangleright$$

Задача 6. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$.

$$\triangleleft\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=-\frac{1}{2\sin^2 x}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2}=-\frac{1}{2}-(-2)=\frac{3}{2}.\ \triangleright$$

Задача 7. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$.

$$\triangleleft\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}}dx=\int\limits_0^{\pi}|\cos x|dx=\int\limits_0^{\pi/2}\cos x dx+$$

$$+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}+(-\sin x)\Big|_{\pi/2}^{\pi}=(1-0)+(0-(-1))=2.\ \triangleright$$

Задача 8. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

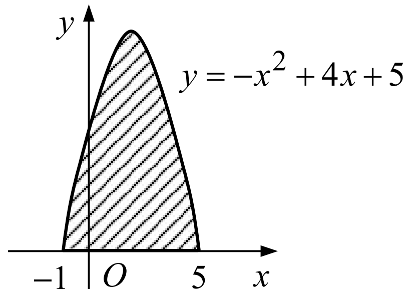
$$\triangleleft\int\limits_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{x}=t, & \\ x=t^2, & \begin{array}{|c|c|c|}x&4&9\\ \hline t&2&3\end{array}\\ dx=2t\,dt, & \end{array}\right|=\int\limits_2^3\frac{2tdt}{t+1}=2\int\limits_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=2\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^3=2(3-\ln 4)-2(2-\ln 3)=2-2\ln\frac{4}{3}.\ \triangleright$$

Задача 9. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+4x+5$ и осью Ox (см. рисунок).

◁ Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y=-x^2+4x+5$ с осью $Ox: x_1=-1,\ x_2=5$.

Используя формулу $S=\int\limits_a^b f(x)\,dx$, получим:



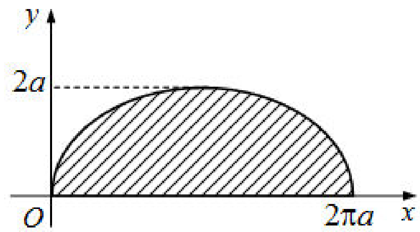
$$S=\int\limits_{-1}^{5}\left(-x^2+4x+5\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2+5x\right)\Bigg|_{-1}^{5}=$$

$$=-\frac{5^3}{3}+2\cdot 5^2+5\cdot 5+\frac{(-1)^3}{3}-2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)=$$

$$=-\frac{125}{3}+50+25-\frac{1}{3}-2+5=36.\ \triangleright$$

Задача 10. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ и осью Ox (см. рисунок).

◁ По формуле $S=\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\,dt$ имеем



$$S=\int\limits_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt=$$

$$=a^2\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

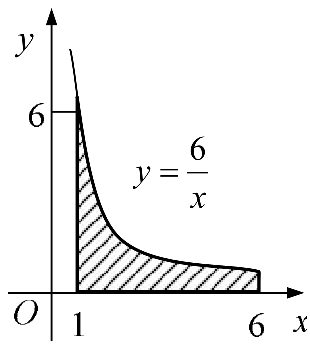
$$=a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi}=3\pi a^2.\ \triangleright$$

Задача 11. Найти длину дуги полукубической параболы $y=x^{3/2}$ от $x=0$ до $x=5$.

◁ Так как $y=x^{3/2}$ и $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$, то по формуле $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ получим

$$l=\int\limits_0^5\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int\limits_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^5=\frac{335}{27}.\ \triangleright$$

Задача 12. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $xy=6$, $x=1$, $x=6$, $y=0$ (см. рисунок).



◁ Из уравнения гиперболы $xy=6$, ограничивающей сверху данную трапецию, находим выражение для y и применяем формулу $V_{Ox}=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$:

$$V_{Ox}=\pi\int\limits_1^6 \frac{36}{x^2}dx=-36\pi\cdot\frac{1}{x}\Bigg|_1^6=-36\pi\cdot\left(\frac{1}{6}-1\right)=30\pi. \ ▷$$

Задача 13. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$ или доказать его расходимость.

◁ По определению имеем: $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{a\to-\infty} arctgx\Big|_a^0=$

$=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(arctg0-arctga\right)=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ (интеграл сходится). ▷

Задача 14. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ или доказать его расходимость.

◁ Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$.

$$\int\limits_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{1+\varepsilon}^2\frac{(x-1+1)dx}{\sqrt{x-1}}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{1+\varepsilon}^2\sqrt{x-1}dx+\int\limits_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{3/2}\Bigg|_{1+\varepsilon}^2+2\sqrt{x-1}\Bigg|_{1+\varepsilon}^2\right)=$$

$$=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}. \ ▷$$