Лекция 6. Плоскость и прямая в пространстве

Координатное пространство. Уравнение поверхности

Пусть $\mathbb{R}^3 = \{(x;y;z):\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ – множество точек координатного пространства.

Если $S = \{M(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 :\ F(x;\ y;\ z) = 0\}$ – некоторая поверхность, то $F(x;\ y;\ z) = 0$ – **уравнение поверхности** *S* (рис. 6.1).

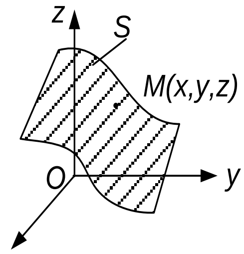

Рис.6.1

Например, уравнение сферы радиуса *R*, с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 .$$

Общее уравнение плоскости в пространстве

В координатном пространстве *Oxyz* рассмотрим некоторую плоскость *P*. Пусть задана точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) \in P$ и любой ненулевой вектор $\vec{N}(A,B,C)$ перпендикулярный плоскости *P*, называемый **вектором нормали** плоскости *P* (рис. 6.2).

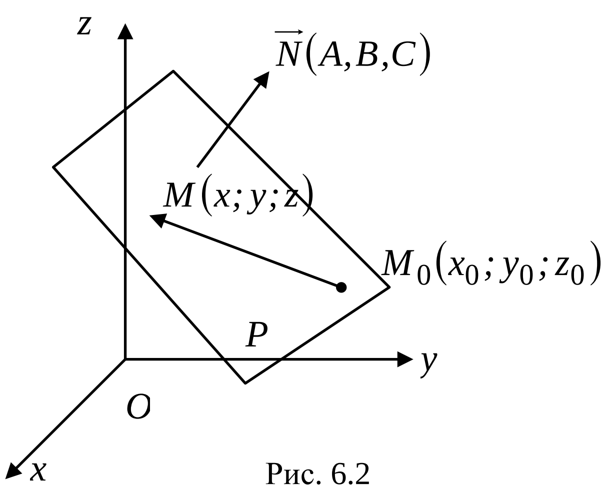

Рис. 6.2

Для любой точки $M(x;\ y;\ z) \in P$, вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0) \perp \vec{N}$, т.е. $\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ или

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \qquad (6.1)$$

Итак, уравнение произвольной плоскости (6.1) – это линейное уравнение относительно координат $x,\ y,\ z$ текущей точки *M* плоскости *P*. Его общий вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0\ . \qquad (6.2)$$

Обратно, можно показать, что любое линейное уравнение задает некоторую плоскость.

Уравнение (6.2) называется **общим уравнение плоскости** в пространстве.

Неполные уравнения плоскости:

1) $Ax + By + Cz = 0\ \ (D = 0)$.

Координаты точки $O(0;\ 0;\ 0)$ удовлетворяют уравнению плоскости, т.е. плоскость проходит через начало координат;

2) какой-то один из коэффициентов A, B, C обращается в нуль:

а) $Ax+By+D=0$ $(C=0)$. Тогда в качестве нормали можно взять вектор $\vec{N}(A;B;0)\Leftrightarrow\vec{N}\perp Oz$, т.е. плоскость параллельна оси Oz;

б) $By+Cz+D=0$ $(A=0)-$уравнение плоскости параллельной Ox;

в) $Ax+Cz+D=0$ $(B=0)-$ уравнение плоскости параллельной Oy;

3) два коэффициента равны 0: $A=B=0,\ C\neq0\Rightarrow Cz+D=0,\ z=-\dfrac{D}{C}$;

$z=z_0-$уравнение плоскости, перпендикулярной оси Oz.

Замечание. В общем уравнении плоскости (6.2) все три коэффициента *A,B,C* не могут одновременно равняться нулю, так как $\vec{N}(A;B;C)\neq\vec{0}$.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть три точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0),\ M_1(x_1;\ y_1;\ z_1), M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ не лежат на одной прямой. Найдем уравнение плоскости P, проходящей через эти точки. Если обозначить $\vec{a}=\overrightarrow{M_0M_1}=\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right), \vec{b}=\overrightarrow{M_0M_2}=\left(b_x;\ b_y;\ b_z\right)$,

то $M(x;\ y;\ z)\in P\Leftrightarrow$ векторы $\overrightarrow{M_0M},\vec{a},\vec{b}-$компланарны $\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}\vec{a}\vec{b}=0\Leftrightarrow$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=0.$$

После раскрытия определителя получим общее уравнение искомой плоскости.

Угловые соотношения между плоскостями

Пусть заданы две плоскости:

$P_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;\ \ \overrightarrow{N_1}=(A_1;B_1;C_1),$

$P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0;\ \ \overrightarrow{N_2}=(A_2;B_2;C_2).$

Угол между плоскостями это один (любой) из двух двугранных углов, который можно измерить линейным углом φ (рис.6.6). Очевидно, что можно взять $\varphi=\left(\widehat{\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}}\right)$. Тогда $$cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

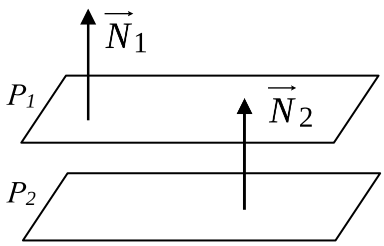

Рис.6.3

Частные случаи.

Условие параллельности плоскостей (рис.6.3)

$P_1\,||\,P_2\Leftrightarrow\ \overrightarrow{N_1}\,||\,\overrightarrow{N_2}$ или $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.

Если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают.

Условие перпендикулярности плоскостей

$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$ или $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

Расстояние от точки до плоскости. Линейные неравенства трех переменных.

Пусть задано уравнение некоторой плоскости в пространстве $P: Ax + By + Cz + D = 0$.

Обозначим $\rho(M^*, P) = \delta -$ расстояние от точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ до плоскости P. Аналогично плоскому случаю можно показать, что

$$\delta = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

а линейные неравенства трех переменных задают полупространства, на которые разделяет плоскость множество точек координатного пространства:
$\Pi^+ = \{M(x, y, z) : Ax + By + Cz + D > 0\} -$ это полупространство, на которое "указывает" вектор нормали, а
$\Pi^- = \{M(x, y, z) : Ax + By + Cz + D < 0\} -$ это другое полупространство.

Общие уравнения прямой в пространстве

Пространственную кривую Γ – линию пересечения поверхностей S_1 и S_2 задают в виде системы уравнений этих поверхностей:

$$\Gamma = S_1 \cap S_2 : \begin{cases} F_1(x;\ y;\ z) = 0; \\ F_2(x;\ y;\ z) = 0. \end{cases}$$

Тогда прямую можно представить как линию пересечения двух плоскостей (рис. 6.4):

$$l : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Уравнения (6.3) называются **общими уравнениями** прямой l в пространстве.

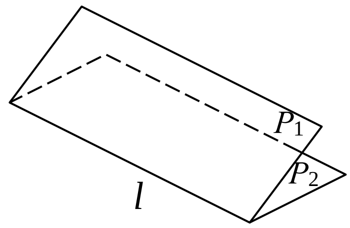

Рис. 6.4

Канонические уравнения прямой в пространстве

Пусть для прямой l (рис.6.5) заданы:
точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) \in l$ и $\vec{0} \neq \bar{a} = (m; n; p) -$ направляющий вектор прямой l ($\vec{a} \parallel l$).
Для любой точки $M(x;\ y;\ z) \in l$, вектор $\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0) \parallel \vec{a}$, т.е. получим по условию коллинеарности векторов

а) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ – **канонические уравнения прямой** в пространстве или

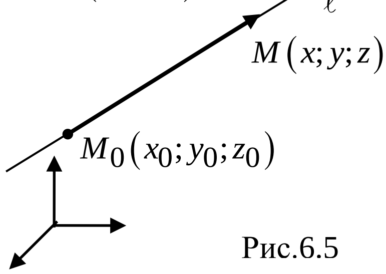

Рис.6.5

б) $\exists t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a},$ т.е.

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,m, \\ y = y_0 + t\,n, \\ z = z_0 + t\,p. \end{cases}$$ – **параметрические уравнения прямой** в пространстве.

Переход от общих уравнений прямой к каноническим (параметрическим)

Пример 1. Даны $l: \begin{cases} x - y + z + 4 = 0, \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ – общие уравнения прямой. Перейти к параметрическим уравнениям.

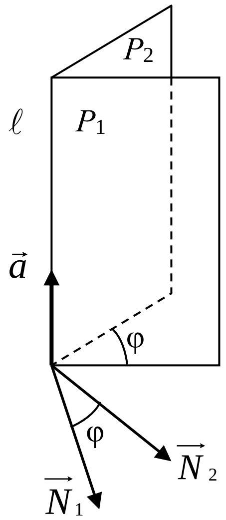

Рис.6.6

◁1) $\overrightarrow{N_1}(1; -1; 1),\ \overrightarrow{N_2}(2; 1; 3)$. В качестве направляющего вектора прямой l можно взять (рис.6.6): вектор

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k},\ \vec{a} = (-4; -1; 3).$$

2) Найдем точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) \in l$, в качестве координат $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ выбираем любое из бесчисленных решений исходной системы, например:

при $z = 0$, получим $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3; \end{cases}$, $M_0(-1;\ 3;\ 0)$.

Итак, получаем канонические уравнения прямой: $\dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{3}$ и

$$\begin{cases} x = -1 - 4t, \\ y = 3 - t, \\ z = 3t \end{cases}$$ – параметрические уравнения. ▷

Угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью в пространстве

Угол между прямыми l_1 и l_2 с направляющими векторами $\vec{a}_1 = (m_1;\ n_1;\ p_1)$ и $\vec{a}_2 = (m_2;\ n_2;\ p_2)$ понимаем как угол φ между их направляющими векторами. Тогда, очевидно, что

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

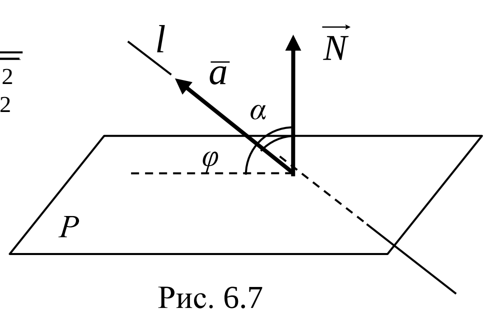

Рис. 6.7

а) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$;

б) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0.$

Угол φ между плоскостью P и непараллельной ей прямой l, можно определить как $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, где угол $\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{N}})$ (рис 6.7). Т.к. $\sin\varphi = \cos\alpha$, то $sin\,\varphi = \dfrac{\bar{a} \cdot \vec{N}}{|\bar{a}| \cdot |\vec{N}|}$. Если φ выбирать только острым углом, то:

$$\sin\varphi = \frac{|mA + nB + pC|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Частные случаи:

а) прямая и плоскость параллельны (рис.6.8.а):

$l \parallel P \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$;

б) прямая и плоскость перпендикулярны (рис.6.8.б):

$l \perp P \Leftrightarrow \vec{N} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

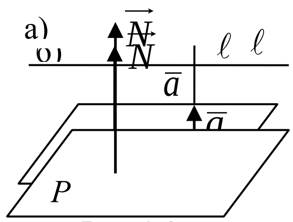

Рис.6.8

Пример 2. Найти точку пересечения прямой

$\ell : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ и плоскости $P: 3x - y + z - 4 = 0$.

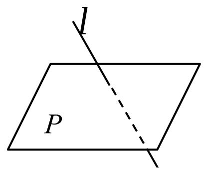

Рис.6.9

◁ $\vec{a} = (2;\ 3;\ 2)$ – направляющий вектор заданной прямой, $\vec{N} = (3;\ -1;\ 1)$ – вектор нормали плоскости: $\vec{N} \cdot \vec{a} = 6 - 3 + 2 \neq 0$, следовательно, прямая и плоскость не параллельны, т.е. точка пересечения существует (рис.6.9).

Перейдем к параметрическим уравнениям прямой: $l: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$

Подставим $x,\ y,\ z$ в уравнение плоскости, тогда

$3(1 + 2t) - (-1 + 3t) + 5 + 2t - 4 = 0$,

$5t + 5 = 0,\ t_0 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 + 2(-1) = -1 \\ y_0 = -4 \\ z_0 = 3 \end{cases}$.

Ответ: $M_0(-1;\ -4;\ 3)$ – искомая точка пересечения. ▷