Лекция 6. Плоскость и прямая в пространстве

Плоскость

В координатном пространстве рассмотрим некоторую плоскость P. Пусть задана точка и любой ненулевой вектор перпендикулярный плоскости P, называемый **вектором нормали** плоскости P (рис. 6.1).

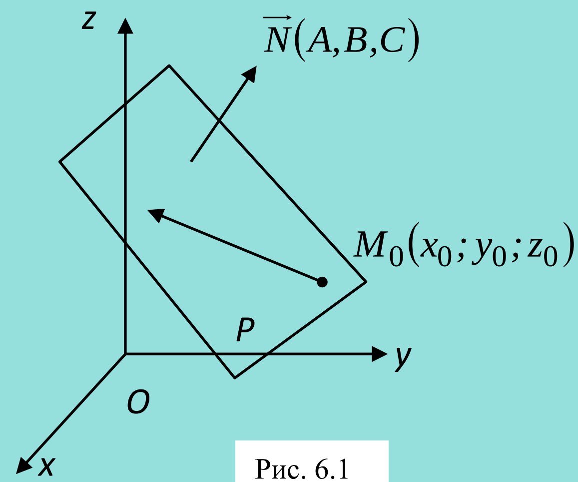

Рис. 6.1

Возможные уравнения плоскости представлены в следующей таблице:

Задано	Уравнение плоскости	Вид уравнения
$M_0(x_0;y_0;z_0)$ $\vec{N}=(A;\,B;\,C)$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ $Ax+By+Cz+D=0$	*Уравнение плоскости с заданным нормальным вектором.* *Общее уравнение плоскости*
$M_0(x_0;y_0;z_0)$ $M_1(x_1;y_1;z_1)$ $M_2(x_2;y_2;z_2)$	$\vec{a}=\overrightarrow{M_0M_1}=(a_x;\,a_y;\,a_z)$, $\vec{b}=\overrightarrow{M_0M_2}=(b_x;b_y;b_z)$, $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$	*Уравнение плоскости, проходящей через три точки* M_0 ,M_1 ,M_2 .

Неполные уравнения плоскости:

1. $Ax+By+Cz=0 \ \ (D=0)$	Координаты точки $O(0;\ 0;\ 0)$ удовлетворяют уравнению плоскости, т.е. плоскость проходит через начало координат;
2. Какой-то один из коэффициентов обращается в нуль:	а) $Ax+By+D=0 \ \ (C=0)$. Тогда в качестве нормали можно взять вектор $\vec{N}(A;B;0) \Leftrightarrow \vec{N} \perp Oz$, т.е. плоскость параллельна оси Oz; б) $By+Cz+D=0 \ \ (A=0)$ – уравнение плоскости параллельной Ox; в) $Ax+Cz+D=0 \ \ (B=0)$ – уравнение плоскости параллельной Oy;
3. Два коэффициента равны 0:	$A=B=0,\ C\neq 0 \Rightarrow Cz+D=0,\ z=-\dfrac{D}{C}$; $z=z_0$ – уравнение плоскости, перпендикулярной оси Oz.

Угловые соотношения между плоскостями

Уравнения плоскостей	Угол φ между P_1 и P_2	Условие $P_1 \parallel P_2$	Условие $P_1 \perp P_2$
$P_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ $\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ $P_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$	$\cos\varphi = \dfrac{\left\|\left(\overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2\right)\right\|}{\left\|\overrightarrow{N}_1\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{N}_2\right\|}$ или $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$	$\overrightarrow{N}_1 \parallel \overrightarrow{N}_2$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$	$\overrightarrow{N}_1 \perp \overrightarrow{N}_2$ $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Пусть задано уравнение некоторой плоскости в пространстве $P: Ax + By + Cz + D = 0$ Обозначим $\rho(M^*, P) = \delta$ – расстояние от точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ до плоскости P. Тогда

$$\delta = \frac{\left|Ax^* + By^* + Cz^* + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Прямая в пространстве

Если для прямой L заданы точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$, направляющий вектор $\vec{a} = (m;\ n;\ p) \neq \vec{0}$ $(\vec{a} \parallel L)$ (рис. 6.2), тогда возможные уравнения прямой L в пространстве представлены в следующей таблицей:

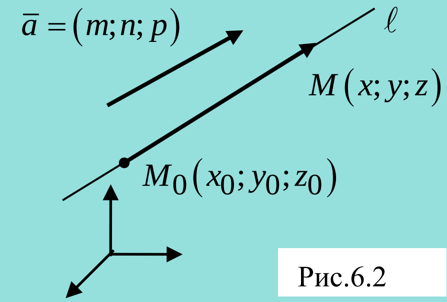

Рис.6.2

Задано	Уравнение прямой	Вид уравнения
$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$, направляющий вектор $\vec{a} = (m;\ n;\ p) \neq \vec{0}$	$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$	*Каноническое уравнение прямой, уравнение прямой с заданным направляющим вектором* $\vec{a} = (m;\ n;\ p) \neq \vec{0}$
$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$, направляющий вектор $\vec{a} = (m;\ n;\ p) \neq \vec{0}$	$\begin{cases} x = x_0 + t\,m, \\ y = y_0 + t\,n, \\ z = z_0 + t\,p. \end{cases}$	*Параметрическое уравнение прямой*
	$l: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$	*Общие уравнения прямой*

Угловые соотношения между прямыми

Уравнения прямых	Угол φ между L_1 и L_2	Условие $L_1 \parallel L_2$	Условие $L_1 \perp L_2$
$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$, $\vec{a}_1=(m_1;\ n_1;\ p_1)$ $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{a}_2=(m_2;\ n_2;\ p_2)$	$\cos\varphi=\frac{\lvert\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\rvert}{\lvert\vec{a}_1\rvert\cdot\lvert\vec{a}_2\rvert}$ или $\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$	$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$	$\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$ $m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0$

Угловые соотношения между прямой и плоскостью в пространстве

Уравнения прямой и плоскости	Угол φ между L и P	Условие $L \parallel P$	Условие $L \perp P$
$L:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, $\vec{a}=(m;\ n;\ p)$ $P:\ Ax+By+Cz+D=0$, $\vec{N}=(A;\ B;\ C)$	$\sin\varphi=\frac{\lvert\vec{a}\cdot\vec{N}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{N}\rvert}$ или $\sin\varphi=\frac{\lvert mA+nB+pC\rvert}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.	$\vec{a}\perp\vec{N}$ $mA+nB+pC=0$	$\vec{a}\parallel\vec{N}$ $\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$