Лекция 5. Координатная плоскость. Прямая на плоскости. Кривые второго порядка

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат (ПДСК) на плоскости Oxy и произвольный вектор $\vec{a}$ (рис. 5.1). Точка координатной плоскости M имеют те же самые координаты (x,y), что и её радиус-вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x;y)$. Множество точек координатной плоскости обозначим $\mathbb{R}^2 = \{(x;y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

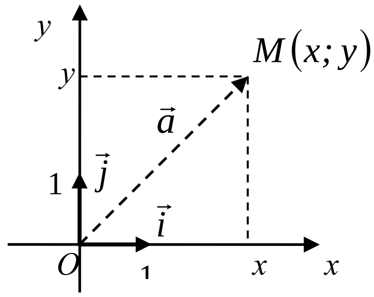


Рис.5.1

Разложение вектора по ортонормированному базису $\vec{i}, \vec{j}$ будет иметь вид: $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где $x = np_{Ox}\,\vec{a}$, $y = np_{Oy}\,\vec{a}$.

Формула скалярного произведения векторов $\vec{a} = (a_x;a_y)$ и $\vec{b} = (b_x;b_y)$ примет вид:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Для векторов на плоскости условия коллинеарности и перпендикулярности аналогичны трехмерному случаю:

$$\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}; \;\; \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y = 0.$$

Равенство $f(x,y) = 0$ называется ***уравнением кривой*** $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, если координаты всех точек $M(x,y)$, принадлежащих Γ, удовлетворяют этому уравнению, а координаты точек, не принадлежащих Γ, не удовлетворяют этому уравнению.

Пример 1. Выведем уравнение окружности радиуса R и с центром в точке $O^*(a,b)$ (рис.5.2).

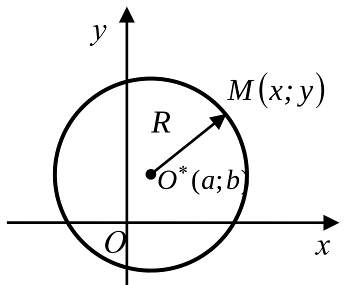


Рис.5.2

Возьмем произвольную точку $M(x;y)$ на окружности тогда $\left|\overrightarrow{O^*M}\right| = R$, а т.к. $\overrightarrow{O^*M} = (x-a, y-b)$, $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{(x-a)^2 - (y-b)^2}$, то получим уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O^*(a;b)$:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (5.1)$$

Замечание. Если заданы кривые $\Gamma_1 : f_1(x;y) = 0$ и $\Gamma_2 : f_2(x;y) = 0$, тогда:

а) точки пересечения кривых находим, решая систему уравнений задающих эти кривые: $\begin{cases} f_1(x;y) = 0; \\ f_2(x;y) = 0. \end{cases}$

б) объединение кривых $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ удовлетворяет уравнению: $f_1(x;y) \cdot f_2(x;y) = 0$.

Общее и каноническое уравнения прямой на плоскости

Любой ненулевой вектор, ортогональный (коллинеарный) прямой называется ***нормальным (направляющим)*** вектором прямой:

Пусть для прямой l известны: точка $M_0(x_0;\ y_0)\in l$ и

а) вектор нормали $\vec{N}(A;\ B)$ $(\vec{N}\perp l)$ или

б) направляющий вектор $\vec{a}(m;\ n)$ $(\vec{a}\,||\,l)$.

Выведем уравнение прямой l, т.е. уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки $M(x;\ y)\in l$.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}=\left(x-x_0, y-y_0\right)$, тогда

а) $\vec{N}\perp\overrightarrow{M_0M}\Leftrightarrow\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, что означает:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0 \qquad (5.2)$$

б) $\vec{a}\,||\,\overrightarrow{M_0M}\Leftrightarrow$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (5.3)$$

Уравнение (5.3) называется ***каноническим уравнением прямой***.

Уравнения (5.2) и (5.3) после несложных преобразований можно привести к виду:

$$Ax+By+C=0 \qquad (5.4)$$

Уравнение (5.4) называется ***общим уравнением прямой*** на плоскости. Это ***линейное уравнение*** (1-го порядка) и ему удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на прямой l. Очевидно, что если точка не принадлежит прямой, то ее координаты не будут удовлетворять уравнению (5.4).

Таким образом, любой прямой в ПДСК Oxy соответствует какое-то линейное уравнение вида (5.4). Можно доказать и обратное утверждение, а именно, любому линейному уравнению соответствует некоторая прямая.

Замечание. Коэффициенты A и B в уравнении (5.4) – это координаты некоторого нормального вектора $\vec{N}(A;\ B)$.

Неполные уравнения прямой. Пусть в общем уравнении (5.4):

1) $A\neq 0, B=0, Ax+C=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{C}{A}=const$,

тогда $x=x_0-$ уравнение прямой l_1, у которой вектор нормали $\vec{N}(A;\ 0)\perp Oy$, т.е. l_1- вертикальная прямая (рис.5.3);

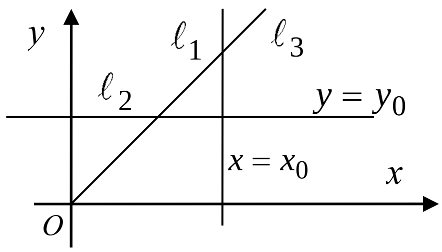


Рис.5.3

2) $\begin{cases}B\neq 0\\ A=0\end{cases}\Rightarrow By+C=0\Leftrightarrow y=-\dfrac{C}{B}=const$,

тогда $y=y_0-$уравнение горизонтальной прямой l_2;

3) $\begin{cases} C = 0; \\ A \neq 0,\ B \neq 0; \end{cases} \Rightarrow Ax + By = 0 \Leftrightarrow O(0;\,0) \in l_3,$ тогда $l_3 -$ прямая, проходящая через начало координат (рис.5.3).

Пример 1. Вершины треугольника *A*, *B*, *C* заданы своими координатами. Найти уравнения: высоты *BH*, стороны *BC*, медианы *MC* (рис.5.4).

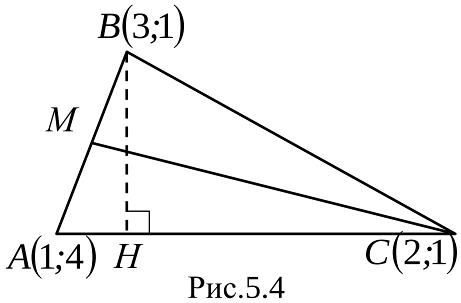


Рис.5.4

$\triangleleft$ 1) $\overrightarrow{AC} = \vec{N}_{BH}\,(1;\,-3),\ B(3;1) \in BH.$ По формуле (5.2) получим уравнение высоты BH :
$1\cdot(x-3) + (-3)\cdot(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y = 0.$

2) $\overrightarrow{BC} = \vec{a}_{BC} = (-1;0)$, выберем $C(2;1) \in BC$. Согласно формуле (5.3) получим каноническое уравнение *BC*: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{0}$ $\triangleright$

Замечание. *Если в каноническом уравнении знаменатель равен нулю, то соответствующий числитель необходимо приравнять к нулю.*

$y - 1 = 0$ или $y = 1$ – уравнение прямой *BC* (горизонтальная прямая).

3) точка *M* – середина отрезка *AB*, тогда согласно формуле середины отрезка:
$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2,\quad y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5.$ Точки $M\left(2;\ 2{,}5\right)$ и $C\left(2;1\right) \in MC$; $\quad \overrightarrow{MC} = \vec{a}_{MC} = \{0;-1{,}5\} \overset{(5.4)}{\Rightarrow} \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y-1}{-1{,}5} \Rightarrow x - 2 = 0;\ x = 2 -$ уравнение *MC* (вертикальная прямая). $\triangleright$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим на плоскости в ПДСК *Oxy* наклонную прямую l с ортом
$\vec{a}^\circ = (\cos\alpha;\cos\beta),\ \alpha = \left(l,\hat{Ox}\right),\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}, (\cos\alpha \neq 0).$

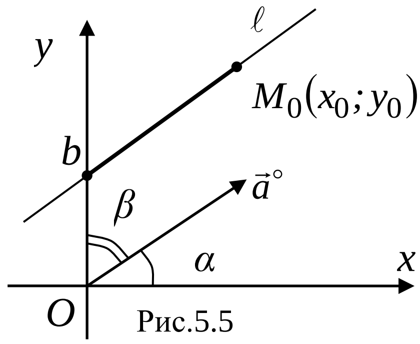


Рис.5.5

Пусть т. $M_0(x_0;\ y_0) \in l$ (рис.5.5). Так как $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\beta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ и тогда $\vec{a}^\circ = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Запишем каноническое уравнение прямой
$l:\ \dfrac{x - x_0}{\cos\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\sin\alpha} \Rightarrow y - y_0 = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x - x_0).$

Назовем число $k = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$ – ***угловым коэффициентом*** прямой.

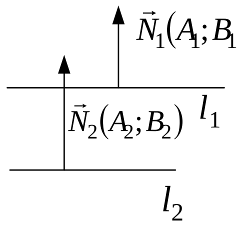
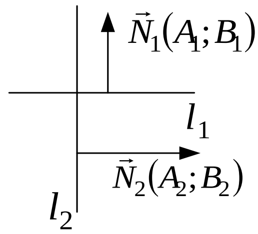
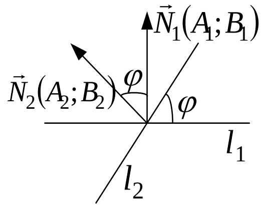
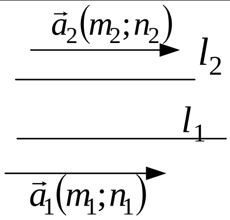
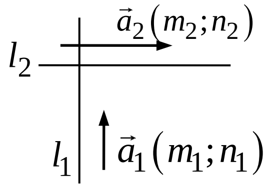
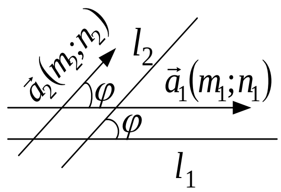
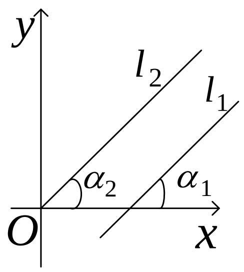
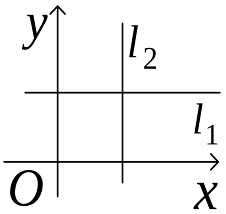
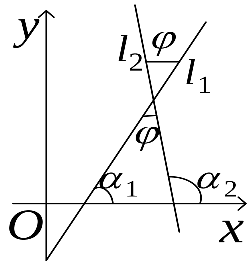
Тогда уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$ называется ***уравнением пучка прямых***, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$. После преобразования получим уравнение, которое называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***:

$$y = kx + b,$$

где $k = tg\alpha$; b – ордината точки пересечения прямой l с осью Oy.

Взаимное расположение прямых l_1 и l_2 представлено в таблице 5.1.

Таблица 5.1

<table>
<tr><th>Условие параллельности
$l_1 \parallel l_2$</th><th>Условие перпендикулярности
$l_1 \perp l_2$</th><th>Пересечение (образуют угол φ - острый угол)</th></tr>
<tr><td colspan="3">$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$</td></tr>
<tr><td>
$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$
$\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$</td><td>
$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$
$\Leftrightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$
$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$</td><td>
$\cos\varphi = \cos(\vec{N}_1 \,\hat{,}\, N_2)$
$= \dfrac{\left|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right|}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$l_1 : \dfrac{x - x_0}{m_1} = \dfrac{y - y_0}{n_1},\ l_2 : \dfrac{x - x_0}{m_2} = \dfrac{y - y_0}{n_2};$</td></tr>
<tr><td>
$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$
$\Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$</td><td>
$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$
$\Leftrightarrow \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$
$m_1m_2 + n_1n_2 = 0$</td><td>
$\cos\varphi = \cos(\vec{a}_1 \,\hat{,}\, \vec{a}_2)$
$= \dfrac{\left|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\right| \cdot \left|\vec{a}_2\right|}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$l_1 : y = k_1x + b_1,\ l_2 : y = k_2x + b_2;$</td></tr>
<tr><td>
$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow k_1 = k_2$</td><td>
$l_1 \perp l_2 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$</td><td>
$tg\,\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$</td></tr>
</table>

Расстояния от точки до прямой. Линейные неравенства

Обозначим $\rho(M^*, l) = \delta$ – расстояние от точки $M^*(x^*; y^*)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$ ($\delta \geq 0$). Выберем некоторую точку $M(x;\ y) \in l$, тогда

$$C = -(Ax + By). \tag{5.5}$$

Очевидно, что $\delta = \left| np_{\vec{N}} \overrightarrow{MM^*} \right|$ (рис.5.6), где $\overrightarrow{MM^*}\left(x^* - x;\ y^* - y\right)$.

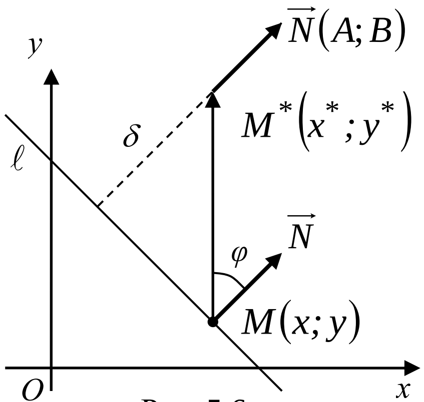


Рис. 5.6

$$np_{\vec{N}} \overrightarrow{MM^*} = \frac{\vec{N} \cdot \overrightarrow{MM^*}}{\vec{N}} = \frac{A\left(x^* - x\right) + B\left(y^* - y\right)}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{Ax^* + By^* - (Ax + By)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$ Учитывая (5.5), получим:

$$np_{\vec{N}} \overrightarrow{MM^*} = \frac{Ax^* + By^* + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{5.6}$$

или

$$\delta = \frac{\left| Ax^* + By^* + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{5.7}$$

Пример 2. Даны две прямые: $l_1: 4x - 3y + 1 = 0$ и $l_2: 3x - 4y - 6 = 0$.

Найти уравнения биссектрис углов, образованных этими прямыми (рис.5.7).

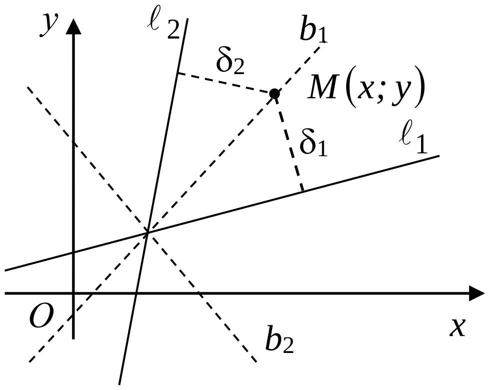


Рис. 5.7

◁ Пусть точка $M(x;y)$ принадлежит биссектрисе, тогда

$$\delta_1 = \rho(M;\ l_1) = \rho(M;\ l_2) = \delta_2.$$

Из формулы (5.7) получим $\delta_1 = \dfrac{|4x - 3y + 1|}{\sqrt{16 + 9}}$; $\delta_2 = \dfrac{|3x - 4y - 6|}{\sqrt{9 + 16}}$. Так как $\delta_1 = \delta_2$, то $|4x - 3y + 1| = |3x - 4y - 6| \Leftrightarrow 4x - 3y + 1 = \pm(3x - 4y - 6)$, т.е.

а) $4x - 3y + 1 = 3x - 4y - 6 \Leftrightarrow x + y + 7 = 0$ – уравнение биссектрисы b_1;

б) $4x - 3y + 1 = -3x + 4y + 6 \Leftrightarrow 7x - 7y - 5 = 0$ – уравнение биссектрисы b_2. ▷

Линейные неравенства

Прямая $l: Ax + By + C = 0$ (рис. 5.8) разбивает плоскость на две полуплоскости: Π^+ – полуплоскость, в которую «указывает» вектор нормали $\vec{N}(A;B)$ и Π^- – другая полуплоскость.

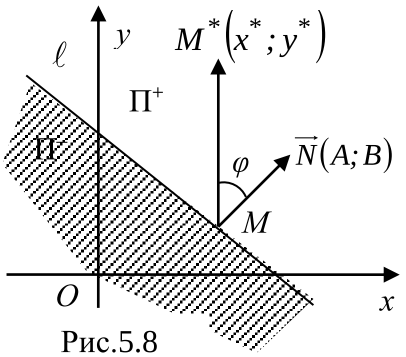


Рис.5.8

Пусть $M^*\left(x^*, y^*\right)$ – произвольная точка плоскости. Согласно (5.6) знак $np_{\vec{N}} \overrightarrow{MM^*}$

совпадает со знаком величины $Ax^* + By^* + C$. Поэтому, то, что точка $M\left(x^*; y^*\right) \in \Pi^+$, равносильно тому, что угол $\varphi = \left(\widehat{\vec{N}, \overrightarrow{MM^*}} \right)$ – острый и проекция $пр_{\vec{N}} \overrightarrow{MM^*} > 0$, т.е. $Ax^* + By^* + C > 0$.

Если же точка $M\left(x^*; y^*\right) \in \Pi^-$, то это равносильно тому, что угол φ – тупой и $пр_{\vec{N}} \overrightarrow{MM^*} < 0$, т.е. $Ax^* + By^* + C < 0$.

Вывод. Линейное неравенство $Ax + By + C > 0$ $(<)$ задает одну из двух полуплоскостей, на которые делит плоскость прямая $l : A\,x + B\,y + C = 0$.

Пример 3. На координатной плоскости заштриховать полуплоскость $\Pi^+ : 3x + 2y - 6 > 0$.

◁ Строим прямую $l : 3x + 2y - 6 = 0$ по двум точкам $A(2;\,0)$, $B(0;\,3)$ и проводим прямую через точки.

Проверяем, лежит ли точка $O(0;0)$ в нужной полуплоскости: $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 > 0$; $-6 > 0$ – неверно, т.е. точка $O\left(0;0\right) \notin \Pi^+$. Значит, нужно штриховать верхнюю полуплоскость (рис.5.9). ▷

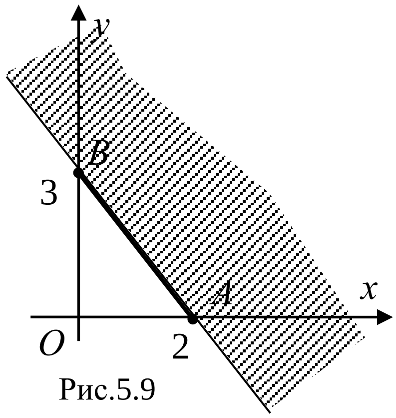


Рис.5.9

Кривые второго порядка

Рассмотрим линии (кривые), определяемые уравнением второй степени относительно текущих координат:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (5.8)$$

Коэффициенты уравнения – любые действительные числа, но хотя бы одно из чисел A, B, C не равно нулю.

Окружность является кривой второго порядка, т. к. ее уравнение (5.1) – частный случай общего уравнения (5.8) (при A=C=1, B=0). Существуют еще три типа кривых второго порядка: эллипс, гипербола и парабола.

Рассмотрим **эллипс** (рис.5.10) и **гиперболу** (рис.5.11).

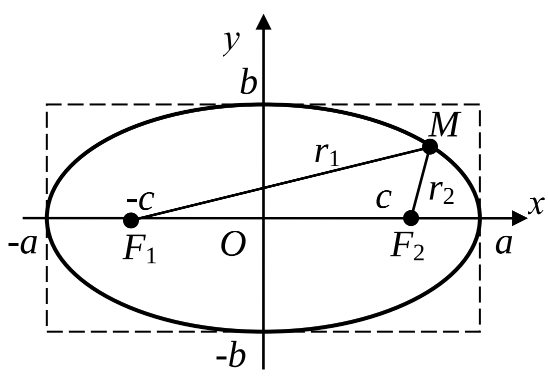


Рис.5.10

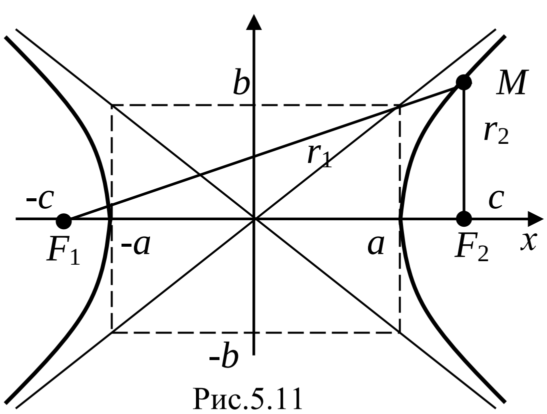


Рис.5.11

Точки $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ называются фокусами кривых;

$r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$ – фокальные радиусы; $M(x; y)$ – текущая точка кривой. Основные сведения о кривых приведены в табл. 4.1.

Таблица.4.1

Основные понятия для эллипса и гиперболы

Наименование	Эллипс (a>b)	Гипербола
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Полуоси	a – большая b – малая (a>b)	a – действительная b – мнимая
Характеристическое свойство	$r_1+r_2=2a$	$\lvert r_1-r_2\rvert=2a$
Уравнение параметров	$a^2-c^2=b^2$, $(a>c)$	$c^2-a^2=b^2$, $(c>a)$
Эксцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$	$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$
Асимптоты	Отсутствуют	$y=\pm\frac{b}{a}x$

Эксцентриситет характеризует степень деформации кривых, чем ближе ε к 1, тем более сжата кривая по оси Oy.

Если заданы канонические уравнения, то построение кривых следует начинать с прямоугольника кривой построенного на полуосях (на рис. 5.10-5.11 отмечен пунктиром). Для гиперболы затем проводят диагонали - асимптоты гиперболы и после этого строят сами кривые.

Рассмотрим **параболу** (рис.5.12):

$y^2 = 2px$ – **каноническое уравнение параболы**, где $p\ (p>0)$ – **параметр**; $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ – ***фокус-точка***; $x=-\frac{p}{2}$ – вертикальная прямая называется ***директрисой параболы***.

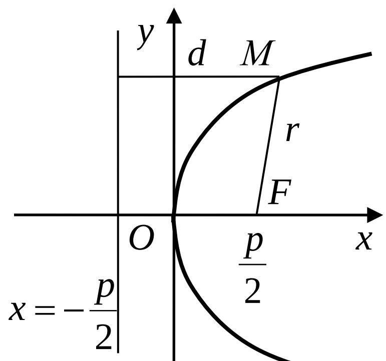


Рис. 5.12

Характеристическое свойство параболы: $d = r$.

На рис. 5.13 приведены различные случаи расположения параболы в зависимости от ее уравнения (a>0):

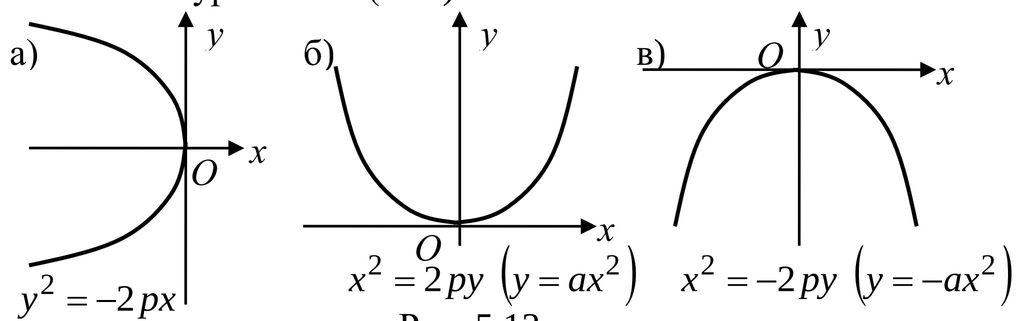


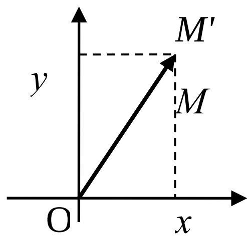
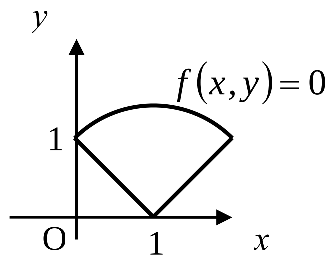
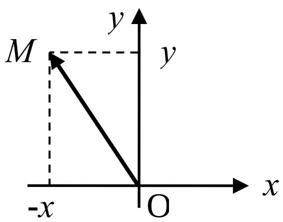
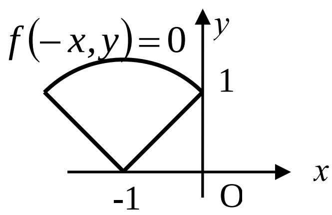
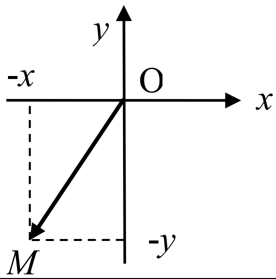
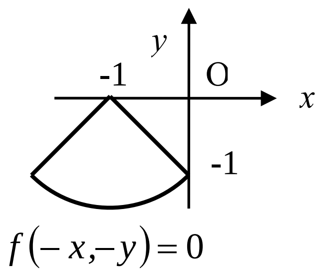
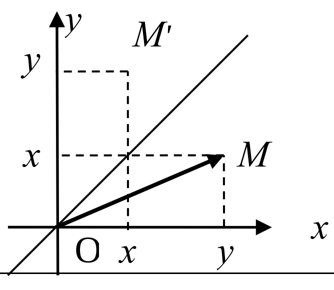
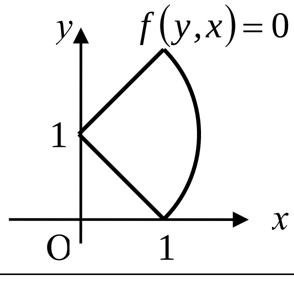
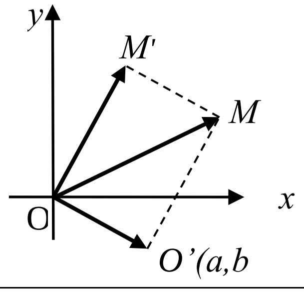
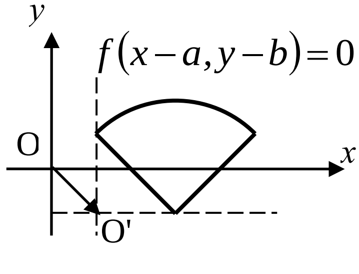
Рис. 5.13

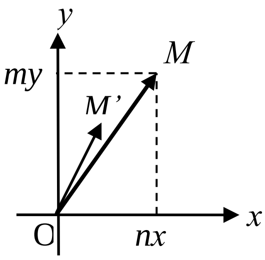
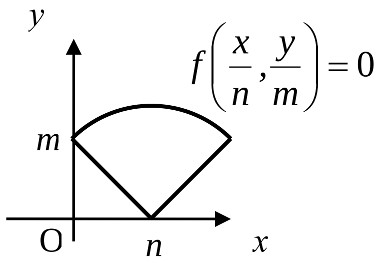
Преобразование координат. Определение типа кривой второго порядка

Пусть в системе координат $Ox'y'$ нам хорошо известна кривая Г' и ее уравнение $f(x',y')=0$. Если произвели преобразование координат: $x'=\varphi(x,y)$, $y'=\psi(x,y)$, то уравнение примет вид: $f(\varphi(x,y);\psi(x,y))=0$ или $F(x,y)=0$. В зависимости от вида преобразования в таблице 4.2 представлено в какую кривую Г преобразуется исходная кривая Г'.

Таблица 5.2

Виды преобразований координат точек плоскости

Преобразование координат	Точка $M(x,y)$ – образ. точки $M'(x',y')$	Кривая Г и ее уравнение
1.Тождественное: $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$		
2.Симметрия относительно оси Oy: $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$		
3.Симметрия относительно точки $O(0,0)$: $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$		
4.Симметрия относительно бисектриссы $y=x$: $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$		
5.Параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{OO'}(a,b)$: $\begin{cases} x'=x-a \\ y'=y-b \end{cases}$ $\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{OM}$		

6.Растяжение по оси Ox (Oy) в n (m) раз: $\begin{cases} x' = x/n \\ y' = y/m \end{cases}$		

Используем преобразования координат для определения типа кривой и построения ее графика путем приведения общего уравнения (5.8) к каноническому виду.

Пример. Определить тип кривой $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$, заданной уравнением 2-го порядка, ее параметры и построить эту кривую.

$\lhd$ В данном случае $A \cdot C > 0,\ B = 0$. Выделим полные квадраты по каждой переменной *x* и *y*.

$$4\left(x^2 - \frac{2 \cdot 4x}{2} + 4\right) + \left(y^2 + \frac{2 \cdot 2y}{2} + 1\right) - 16 - 1 + 13 = 0 \text{ или}$$

$$4(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4, \quad \frac{(x-2)^2}{1^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1. \qquad (5.9)$$

Сначала для эллипса (рис.5.10) с каноническим уравнением $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ (*a*>*b*) применим преобразование 4 (см. табл.5.2): $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ (т.к. у нас 1=*a*<*b*=2). Каноническое уравнение примет вид: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, а график соответственно перейдет в симметричный относительно прямой *y*=*x* ($F_1, F_2 \in Oy$). Теперь, чтобы получить исходное уравнение (5.9) осталось применить преобразование 5: $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$ – эллипс получит сдвиг на вектор $\overrightarrow{OO'}(2,-1)$ (рис.5.14). Параметры эллипса: *a*=2, $b = 1,\quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3},\quad \varepsilon = c/a = \sqrt{3}/2 < 1$. $\rhd$

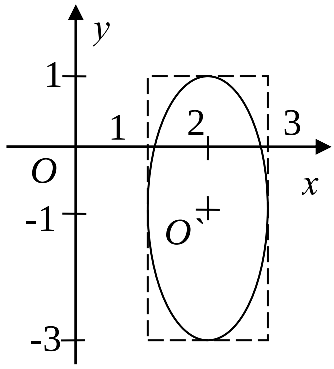


Рис.5.14

Замечание. Уравнение (5.8) не всегда задает собственно кривую второго порядка, возможны случаи вырождения. Так, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задает точку *O*(0,0), а уравнение $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$ задает пару пересекающихся прямых.

С учетом этого замечания верно следующее утверждение.

Утверждение. Уравнение (5.8) при *B*=0 определяет: при *A*=*C* – окружность; при $A \cdot C > 0$ – эллипс; при $A \cdot C < 0$ – гиперболу; при $A \cdot C = 0$ – параболу.