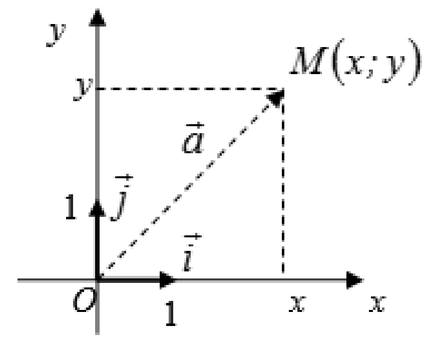
Лекция 5: Координатная плоскость. Прямая на плоскости. Кривые второго порядка

Множество точек координатной плоскости обозначим

$$\mathbf{R}^2 = \{(x;y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$$



$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x;y) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где $x = np_{Ox}\,\vec{a}$; $y = np_{Oy}\,\vec{a}$.

Формула скалярного произведения векторов $\vec{a} = (a_x; a_y)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y)$ примет вид: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

Условия коллинеарности и перпендикулярности:

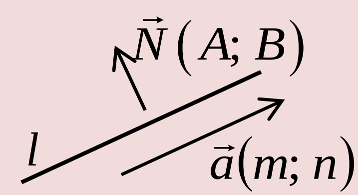
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}; \qquad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y = 0$$

Равенство $f(x,y) = 0$ называется ***уравнением кривой*** $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$, если координаты всех точек $M(x,y)$, принадлежащих Γ, удовлетворяют этому уравнению, а координаты точек, не принадлежащих Γ, не удовлетворяют этому уравнению

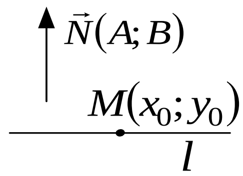
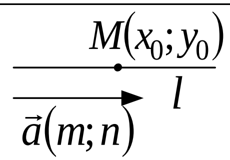
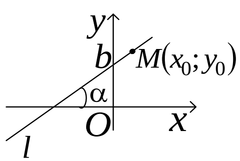
Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид:

$$Ax + By + C = 0$$

Нормальный вектор (обозначение $\vec{N}$) – это перпендикулярный ей ненулевой вектор, **направляющий вектор** (обозначение $\vec{a}$) – это параллельный ей ненулевой вектор.



ВИДЫ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

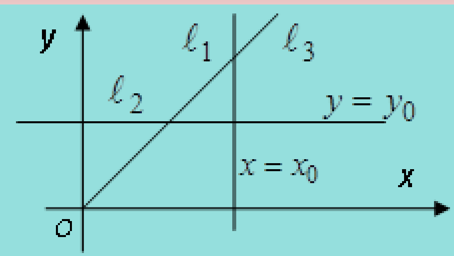
Данные	*Чертеж*	*Аналитический вид*	*Вид уравнения*
$M(x_0;y_0)\in l$ $\vec{N}(A;B)\perp l$		$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ $\Downarrow$ $Ax+By+C=0$	Уравнение прямой с заданным **нормальным вектором** $\vec{N}(A;B)$
$M(x_0;y_0)\in l$ $\vec{a}(m;n)\parallel l$		$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$	**Каноническое уравнение** прямой
$M(x_0;y_0)\in l$ k		$y-y_0=k(x-x_0)$ $\Rightarrow\ y=kx+b,$ где $k=tg\,\alpha$ - угловой коэффициент прямой	Уравнение прямой с заданным **угловым коэффициентом**

Неполные уравнения прямой

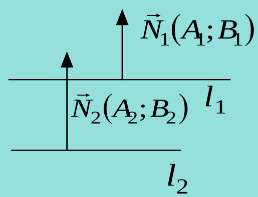
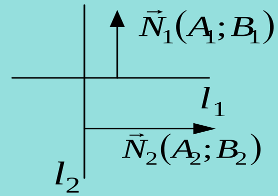
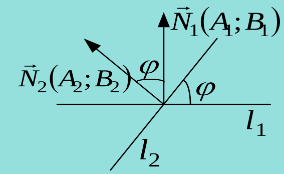
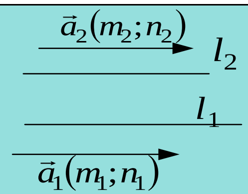
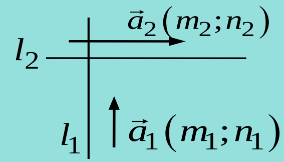
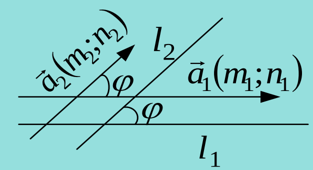
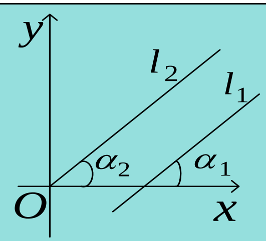
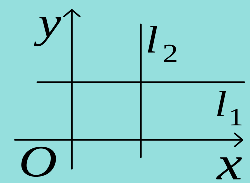
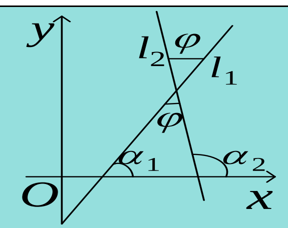
$A\neq 0,\ B=0,\ Ax+C=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{C}{A}=const,$
тогда $x=x_0-$ уравнение вертикальной прямой l_1

$\begin{cases}B\neq 0\\ A=0\end{cases}\Rightarrow By+C=0\Leftrightarrow y=-\dfrac{C}{B}=const$, тогда $y=y_0-$уравнение горизонтальной прямой l_2

$\begin{cases}C=0;\\ A\neq 0,\ B\neq 0;\end{cases}\Rightarrow Ax+By=0\Leftrightarrow O(0;0)\in l_3,$ тогда l_3- прямая, проходящая через начало координат



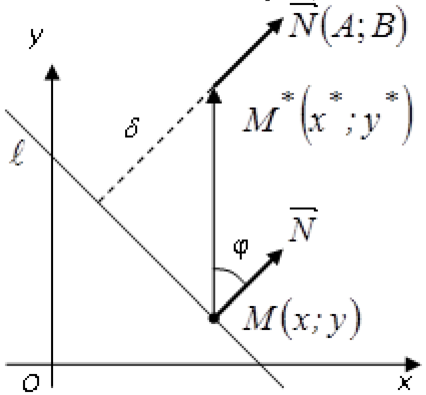
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Условие параллельности $l_1 \parallel l_2$	**Условие перпендикулярности** $l_1 \perp l_2$	**Пересечение (образуют угол φ - острый угол)**
$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ \ l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$		
 $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$ $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$	 $l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ $\Leftrightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	 $\cos\ \varphi = \cos(\vec{N}_1 \widehat{,} N_2)$ $= \dfrac{\lvert \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \rvert}{\lvert \vec{N}_1 \rvert \cdot \lvert \vec{N}_2 \rvert}$
$l_1: \dfrac{x - x_0}{m_1} = \dfrac{y - y_0}{n_1},\ l_2: \dfrac{x - x_0}{m_2} = \dfrac{y - y_0}{n_2};$		
 $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ $\Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$	 $l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$ $\Leftrightarrow \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ $m_1m_2 + n_1n_2 = 0$	 $\cos\ \varphi = \cos(\vec{a}_1 \widehat{,} \vec{a}_2)$ $= \dfrac{\lvert \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \rvert}{\lvert \vec{a}_1 \rvert \cdot \lvert \vec{a}_2 \rvert}$
$l_1: y = k_1x + b_1,\ l_2: y = k_2x + b_2;$		
 $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow k_1 = k_2$	 $l_1 \perp l_2 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$	 $tg\,\varphi = \left\lvert \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right\rvert$

Расстояния от точки до прямой

Обозначим $\rho(M^*, l) = \delta$ – расстояние от точки $M^*(x^*; y^*)$ до прямой

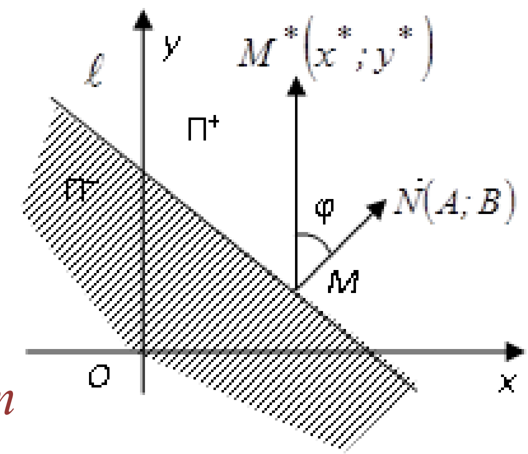
$$l: Ax + By + C = 0 \ (\delta \geq 0)$$



$$\delta = \frac{\left|Ax^* + By^* + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Линейные неравенства

Прямая $l: Ax + By + C = 0$ разбивает плоскость на две полуплоскости: Π^+ – полуплоскость, в которую «указывает» вектор нормали $\overrightarrow{N}(A;B)$ и Π^- – другая полуплоскость



Линейное неравенство $Ax + By + C > 0 \ (<)$ *задает одну из двух полуплоскостей, на которые делит плоскость прямая* $l: Ax + By + C = 0$

Кривые второго порядка

Линии (кривые), определяемые уравнением второй степени относительно текущих координат:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

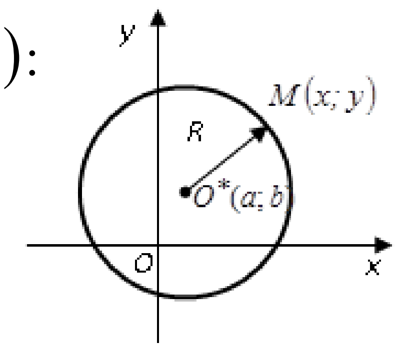
коэффициенты уравнения – любые действительные числа, но хотя бы одно из чисел *A, B, C* не равно нулю

- $B = 0,\ A = C$ ⇒ ОКРУЖНОСТЬ
- $B = 0,\ A \cdot C > 0$ ⇒ ЭЛЛИПС
- $B = 0,\ A \cdot C < 0$ ⇒ ГИПЕРБОЛА
- $B = 0,\ A \cdot C = 0$ ⇒ ПАРАБОЛА

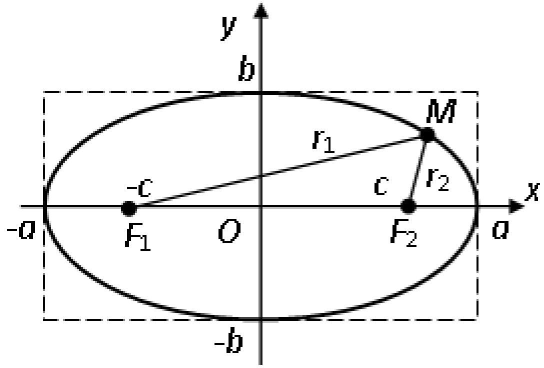
Окружность

Уравнение окружности радиуса *R* с центром в точке $O^*(a;b)$:

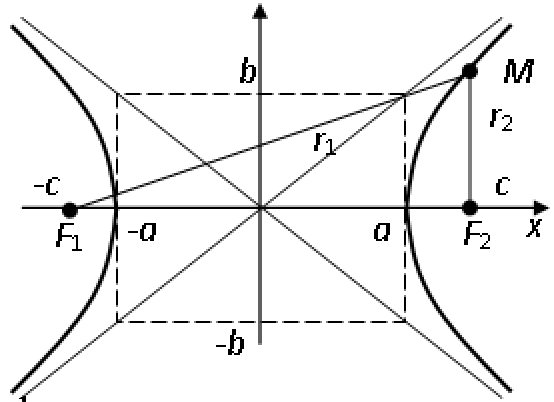
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$



Эллипс



Гипербола



Точки $F_1(-c;\,0)$, $F_2(c;\,0)$ называются фокусами кривых;

$r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$ – фокальные радиусы; $M(x;y)$ – текущая точка кривой

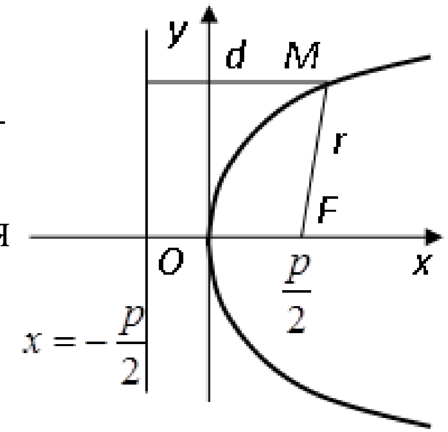
Основные понятия для эллипса и гиперболы

Наименование	Эллипс ($a>b$)	Гипербола
Каноническое уравнение	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
Полуоси	a – большая b – малая ($a>b$)	a – действительная b – мнимая
Характеристическое свойство	$r_1+r_2=2a$	$\lvert r_1-r_2\rvert=2a$
Уравнение параметров	$a^2-c^2=b^2,\ (a>c)$	$c^2-a^2=b^2,\ (c>a)$
Эксцентриситет	$\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$	$\varepsilon=\dfrac{c}{a}>1$
Асимптоты	Отсутствуют	$y=\pm\dfrac{b}{a}x$

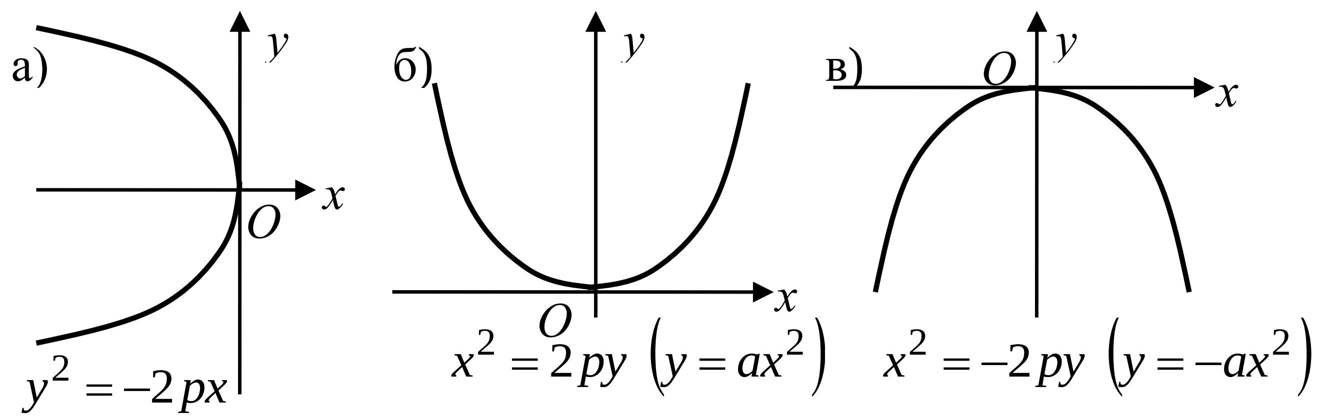
Парабола

$y^2 = 2px$ – **каноническое уравнение параболы**, где $p\,(p>0)$ – **параметр**; $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ – ***фокус-точка***; $x = -\frac{p}{2}$ – вертикальная прямая называется ***директрисой параболы***.

Характеристическое свойство параболы: $d = r$.

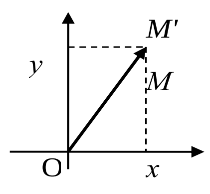
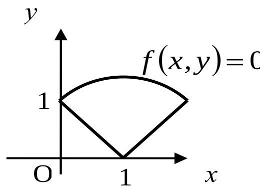
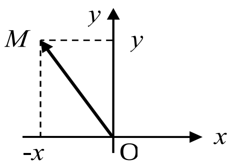
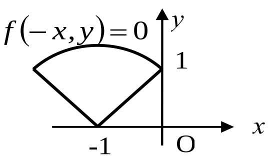
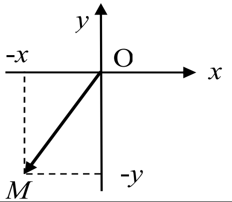
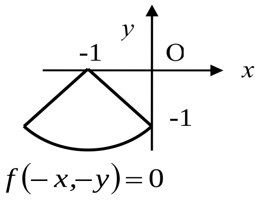
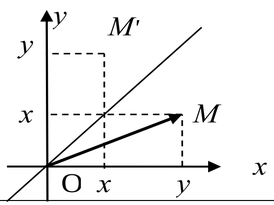
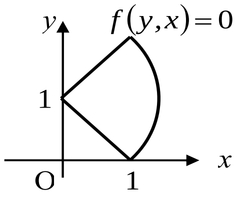
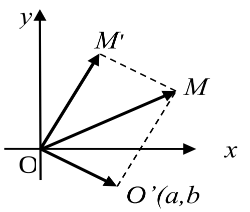
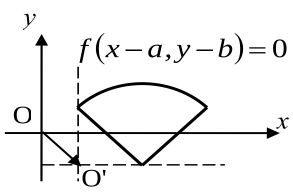


приведены различные случаи расположения параболы в зависимости от ее уравнения (a>0):



Преобразование координат. Определение типа кривой второго порядка

Пусть в системе координат $Ox'y'$ нам хорошо известна кривая Г ' и ее уравнение $f(x',y')=0$.
Если произвели преобразование координат: $x'=\varphi(x,y)$, $y'=\psi(x,y)$, то уравнение примет вид: $f(\varphi(x,y);\psi(x,y))=0$ или $F(x,y)=0$. В зависимости от вида преобразования в таблице представлено в какую кривую Г преобразуется исходная кривая Г '

Преобразование координат	Точка $M(x,y)$ – образ. точки $M'(x',y')$	Кривая Г и ее уравнение
1.Тождественное: $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$		
2.Симметрия относительно оси Oy: $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$		
3.Симметрия относительно точки $O(0,0)$: $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$		
4.Симметрия относительно биссектриссы $y=x$: $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$		
5.Параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{OO'}(a,b)$: $\begin{cases} x'=x-a \\ y'=y-b \end{cases}$ $\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{OM}$		
6.Растяжение по оси Ox (Oy) в n (m) раз: $\begin{cases} x'=x/n \\ y'=y/m \end{cases}$