СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

- Случайную величину $X(\omega) = (X_1, X_2, ..., X_n)$ назовем **системой** n **случайных величин**(n **– мерным случайным вектором**).

$X_1 = X_1(\omega), X_2 = X_2(\omega), ..., X_n = X_n(\omega), \quad \omega \in \Omega$ – случайные величины, заданные на (Ω, F, P)

- Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y).

Функция распределения

- Для любого множества из класса F

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

- *Свойства функции распределения:*

1. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$,
2. $F_x(x) = F(x, +\infty), \quad F_y(y) = F(+\infty, y)$,

$F_x(x),\ F_y(y)$ – функции распределения СВ X и Y.

Следствие: $\quad F(+\infty, +\infty) = 1$

3. Совместная функция распределения – неубывающая функция каждого из своих аргументов.
4. $P(\alpha \le X < \beta,\ \gamma \le Y < \delta) = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma)$

– вероятность попадания значений, принимаемых системой СВ, в прямоугольник.

Совместный закон распределения системы двух случайных величин:

X/Y	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots.$	$\dots$

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i = 1, 2, \dots; \; j = 1, 2, \dots$$

Случайные величины X и Y **независимы**, если при любых i, j события $(X = x_i)$ и $(Y = y_j)$ независимы.

- **Свойства совместного закона распределения:**

1. $p_{ij} \ge 0$;

2. $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1$;

3. $P(X = x_i) = \sum\limits_{j} p_{ij}, \quad P(Y = y_j) = \sum\limits_{i} p_{ij}$

Условные распределения. Условные числовые характеристики

- $(X/Y = y_j)$ – условная случайная величина.

Условный закон распределения:

$(X/Y=y_j)$	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$
P	$\dfrac{p_{1j}}{\sum_i p_{ij}}$	$\dfrac{p_{2j}}{\sum_i p_{ij}}$	$\ldots$	$\dfrac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}$	$\ldots$

.

- **Условное математическое ожидание:**

$$M(X/Y=y_j)=\frac{\sum_i x_i p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}$$

- **Условная дисперсия:**

$$D(X/Y=y_j)=\frac{\sum_i (x_i-a_i)^2 p_{ij}}{\sum_i p_{ij}}$$, где $a_i = M(X/Y=y_i)$

Ковариация

- $\operatorname{cov}(X,Y) = M\left((X-a)(Y-b)\right)$, $a = M(X)$, $b = M(Y)$
- X и Y **некоррелированны,** если $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.
- **Свойства ковариации:**
  - 1. Если X и Y независимы, то $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.
  - 2. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$.
  - 3. $\operatorname{cov}(\alpha X + \beta Y,\ Z) = \alpha \operatorname{cov}(X,Z) + \beta \operatorname{cov}(Y,Z)$,

    $\operatorname{cov}(X,\ \alpha Y + \beta Z) = \alpha \operatorname{cov}(X,Y) + \beta \operatorname{cov}(X,Z)$.
  - 4. $\operatorname{cov}(X,Y) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)$
  - 5. $D(X) = \operatorname{cov}(X,X)$
  - 6. $D(X \pm Y) = D(X) \pm 2\operatorname{cov}(X,Y) + D(Y)$
  - 7. $\left|\operatorname{cov}(X,Y)\right| \le \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$
  - 8. X и Y линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\left|\operatorname{cov}(X,Y)\right| = \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$.

Коэффициент корреляции

- $$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}$$
- Свойства коэффициента корреляции:
  - 1. $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$
  - 2. $\rho(\alpha X,Y)=sign\alpha\cdot\rho(X,Y)$, $\rho(X,\beta Y)=sign\beta\cdot\rho(X,Y)$,

    где $sign\,x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$
  - 3. Коэффициент корреляции принимает значения на отрезке $[-1;1]$.
  - 4. Если СВ X и Y независимы, то $\rho(X,Y)=0$.
  - 5. X и Y линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\rho(X,Y)=\pm1$.

Системы непрерывных СВ

- **Система СВ непрерывна,** если непрерывна совместная функция распределения $F(x, y)$ этой системы.
- **Средняя совместная плотность вероятности системы СВ** по прямоугольнику

  $\Pi(\Delta x, \Delta y) = \{[x, x+\Delta x) \times [y, y+\Delta y)\}$ равна:

$$p_{cp}(x, y) = \frac{P((X, Y) \in \Pi(\Delta x, \Delta y))}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

- **Совместная плотность системы:**

$$p(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P((X, Y) \in \Pi(\Delta x, \Delta y))}{\Delta x \cdot \Delta y}$$ или

$$p(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x, y)}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Свойства функции плотности:

- 1. $p(x,y) \geq 0$
- 2. $p(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\quad F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p(s,t)\, ds\, dt$
- 3. $P((X,Y) \in D) = \iint\limits_{D} p(x,y)\, dx\, dy$
- Следствия:
  - $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\, dx\, dy = 1$
  - $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) dy = p_1(x)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) dx = p_2(y)$, где

$p_1(x)$, $p_2(y)$ функции плотностей СВ X и Y .