Непрерывные случайные величины

Пусть СВ задается своей функцией распределения , $F(x) = P(X < x)$ которая по определению непрерывной СВ является непрерывной функцией аргумента *x*.

Лемма. Если СВ X непрерывна, то для любого $x_0 \in R$ вероятность принять это значение равна нулю: $P(X = x_0) = 0$

Следствие. Если СВ непрерывна, то:

$$P(X \in [\alpha, \beta)) = P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$

$$P(X \in (\alpha, \beta)) = P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$

$$P(X \in (\alpha, \beta]) = P(\alpha < X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$

$$P(X \in [\alpha, \beta]) = P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Плотность распределения. Вероятность попадания непрерывной случайной величины на интервал.

Определение. Мы будем говорить, что для НСВ определена ***плотность распределения вероятностей*** в точке , если существует предел

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

Обозначают плотность распределения $p(x)$ или $f(x)$.

Для НСВ плотность определена тогда и только тогда, когда функция распределения имеет производную в соответствующей точке и при этом $p(x) = F'(x)$. Всюду ниже мы предполагаем, что плотность определена в каждой точке числовой оси.

Поскольку функция распределения является первообразной для плотности распределения, то $F(\beta)-F(\alpha)$ есть интеграл от плотности

$$F(\beta)-F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx$$

В связи с этим формулам для вероятности попадания НСВ на интервал можно придать следующий вид:

$$P(X\in[\alpha,\beta))=P(\alpha\le X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx$$

$$P(X\in(\alpha,\beta))=P(\alpha< X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx$$

$$P(X\in(\alpha,\beta])=P(\alpha< X\le\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx$$

$$P(X\in[\alpha,\beta])=P(\alpha\le X\le\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx$$

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения неотрицательна.

2. Плотность распределения связана с функцией распределения соотношениями:

$$p(x) = F'(x), \;\; F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

3. Интеграл от плотности по всей оси сходится и при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

4. ***Вероятностный смысл плотности распределения***: вероятность того, что НСВ примет значение из промежутка $(x, x+\Delta x)$ приближенно равна , $p(x)\Delta x$ т.е.

$$P(x < X < x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x) \approx p(x)\Delta x$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Предположим, что НСВ задана плотностью распределения $p(x)$. Назовем ***математическим ожиданием*** этой случайной величины число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\,dx .$$

Из определения дисперсии вытекают формулы для вычисления дисперсии НСВ:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 p(x)\,dx \rightarrow \ a = M(X)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx - (M(X))^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Некоторые стандартные распределения
1. Равномерное распределение.

Мы будем говорить, что НСВ ***распределена равномерно*** на отрезке [*a*, *b*], если плотность ее распределения постоянна на этом отрезке и рана нулю вне него

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0 \quad , & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Функция распределения для равномерного распределения и числовые характеристики имеют вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$M[X] = \frac{a+b}{2}, \quad D[X] = \frac{(a-b)^2}{12}, \quad \sigma[X] = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

.

2. Показательное распределение.

НСВ называется распределенной по ***показательному закону***, если плотность распределения этой СВ имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$.

Числовые характеристики:

$$M[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad D[X] = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \sigma[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

3. Нормальное распределение.

Будем говорить, что НСВ распределена по ***нормальному закону*** (по закону Гаусса) с параметрами а и σ, если плотность распределения этой СВ задается следующим образом

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Числовые характеристики нормального распределения:

$M[X]=a$, $D[X]=\sigma^2$