## . Случайные величины.
## Классификация случайных величин

Случайной величиной (СВ) называется переменная, которая в результате испытания в зависимости от случая принимает одно, причем, заранее неизвестное значение из возможного множества своих значений.
Примеры СВ: число пасмурных дней в году; число бракованных деталей в партии; дальность полета артиллерийского снаряда; расход электроэнергии предприятием за определенный период и т. д.
СВ обозначаются большими буквами латинского алфавита $X, Y, Z$, их возможные значения - маленькими буквами $(x_1, x_2, ..., x_k)$, $(y_1, y_2, ..., y_m)$, $(z_1, z_2, ..., z_n)$.

Случайные величины делятся на дискретные (ДСВ) и непрерывные (НСВ).

**Определение 41.1.** ДСВ называется величина, принимающая конечное или счетное множество значений.

**Определение 41.2.** НСВ называется величина, бесконечное множество значений которой есть некоторый конечный или бесконечный интервал числовой оси.

**Пример.** По мишени производят один выстрел. СВ $X$ - число пробоин в мишени, может принимать значения 0 или 1, - это ДСВ. Расстояние от центра мишени до пробоины – НСВ.

**Определение. 41.3.** Случайные величины $X$ и $Y$ называются независимыми, если при любых $i$ ,$j$ события $(X = x_i)$, $(Y = y_j)$ - независимы.

## Дискретные случайные величины.
## Закон распределения дискретных величин

Закон распределения является наиболее полным и исчерпывающим описанием СВ.

**Определение 41.4.** Законом распределения СВ называется соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и соответствующими им вероятностями.

Для ДСВ закон распределения может быть задан: таблично, графически и аналитически (в виде формулы).

***Задание таблицей.*** В этом случае первая строчка таблицы содержит все возможные значения ДСВ, вторая строчка – соответствующие им вероятности:

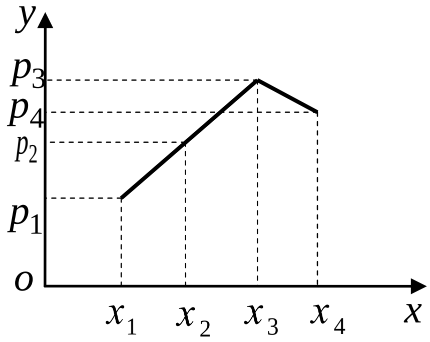
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\dots$ | $p_n$ |

Так как в одном испытании СВ принимает только одно возможное значение, то события $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ являются попарно несовместными и образуют полную группу событий, поэтому:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

***Задание графиком***.

В этом случае по оси $Ox$ откладываются возможные значения случайной величины, а по оси $Oy$ соответствующие им вероятности. В результате соединения полученных точек строится ломаная, которая называется ***многоугольником*** или ***полигоном распределения вероятностей.***




**Пример.** Составить закон распределения ДСВ $X$ – числа попаданий стрелком в мишень при двух выстрелах, если вероятность попадания в нее при первом выстреле равна 0,7, при втором – 0,8.

◁ СВ $X$ – число попаданий в мишень при двух выстрелах может принимать значения 0, 1, 2. Определим вероятности этих значений.

Величина $X$ примет значение $X = 0$, если стрелок промахнется при двух выстрелах: $P(X = 0) = (1 - 0{,}7) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}06$.

СВ $X$ примет значение $X = 1$, если стрелок попадет в мишень только один раз: $P(X = 1) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 = 0{,}38$.

СВ $X$ примет значение $X = 2$, если стрелок попадет в мишень оба раза при двух выстрелах: $P(X = 2) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Закон распределения СВ $X$ будет иметь вид:

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,06 | 0,38 | 0,56 |

## Функция распределения вероятностей случайной величины

**Определение 41.5.** Интегральной функцией распределения (или просто функцией распределения) СВ $X$ называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения $x$ вероятность того, что СВ $X$ примет значения меньшие $x$, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения $F(x)$ является одной из форм закона распределения случайной величины, причем, понятие функции распределения применимо как к НСВ, так и к ДСВ.

***Свойства функции распределения:***

1. Все значения функции распределения заключены между 0 и 1: $0 \le F(x) \le 1$.

2. Вероятность попадания СВ в промежуток $[\alpha, \beta)$ равна приращению $F(x)$ на этом промежутке: $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

3. $F(x)$ – неубывающая функция на всей числовой оси.

4. Если все значения случайной величины $X$ удовлетворяют условию $\alpha \le X \le \beta$, то $F(x) = 0$, при $x \le \alpha$, $F(x) = 1$ при $x > \beta$

Отсюда следует, что $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

5. Вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна 0.

6. Если $X$ – непрерывная случайная величина, то вероятность ее попадания в промежуток $(\alpha, \beta)$ не зависит от того, является ли этот промежуток закрытым или открытым, т.е.:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X < \beta).$$

## Числовые характеристики дискретных случайных величин

Закон распределения является наиболее полным и исчерпывающим описанием СВ, так как позволяет определить вероятности любых связанных с ними событий. Однако он бывает трудно обозрим и не всегда удобным для анализа из-за обилия числовых значений. В этих случаях пользуются числами, описывающими СВ суммарно, так называемыми числовыми характеристиками СВ. Наиболее информативными среди них являются математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

**Определение 41.6.** Математическим ожиданием ДСВ называется сумма произведений всех ее возможных значений $x_i$ на соответствующие им вероятности $p_i$: $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ .

### *Свойства математического ожидания:*

1. Математическое ожидание (МО) постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$, где $C = const$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак МО: $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$, где $C = const$.

3. МО суммы двух СВ равно сумме МО слагаемых: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

4. МО произведения двух независимых СВ $X$ и $Y$ равно произведению их МО: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

**Замечание.** Математическое ожидание СВ есть некоторое среднее, вокруг которого группируются значения, принимаемые СВ. Однако, легко указать такие СВ, которые имеют одинаковые математические ожидания, но различные принимаемые значения. Более того, эти значения могут совершенно по-разному группироваться вокруг математического ожидания. Например: математические ожидания СВ X и Y

| | | |
|---|---|---|
| $X$ | -0,1 | 0,1 |
| $P$ | 0,5 | 0,5 |

| | | |
|---|---|---|
| $Y$ | -10 | 10 |
| $P$ | 0,5 | 0,5 |

очевидно, равны нулю, однако значения СВ $X$ гораздо менее удалены от математического ожидания, чем значения СВ $Y$. Для описания величины разброса значений СВ применяют числовую характеристику, называемую дисперсией.

**Определение 41.7.** Дисперсией (рассеянием) ДСВ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$.

Существует и другая формула для вычисления дисперсии: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, т.е. дисперсия равна разности между МО квадрата СВ и квадратом ее МО.

***Свойства дисперсии:***

1. Дисперсия постоянной равна нулю: $D(C) = 0$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$
3. Дисперсия суммы двух или нескольких независимых СВ равна сумме дисперсий этих величин: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.
4. Дисперсия суммы случайной величины и постоянной равна дисперсии СВ: $D(C + X) = D(X)$.
5. Дисперсия разности двух независимых СВ равна сумме их дисперсий: $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

   *Замечание*. Из определения и свойств дисперсии вытекает, что дисперсия характеризует величину отклонения значений, принимаемых СВ, от математического ожидания. Однако, на практике оказалось более удобным для описания степени рассеяния значений СВ вокруг математического ожидания использовать не дисперсию, а связанную с ней числовую характеристику, называемую средним квадратическим отклонением.

**Определение 41.8.** Средним квадратическим отклонением СВ $X$ называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

***Свойства среднего квадратического отклонения:***

1. $\sigma(C)=0$, где $C=const$.
2. $\sigma(X\cdot Y)=\sigma(X)\cdot\sigma(Y)$, если $X$, $Y$ – независимые СВ.
3. $\sigma(C\cdot X)=|C|\cdot\sigma(X)$.

**Определение 41.9.** Модой $Mo(X)$ СВ $X$ называется ее наиболее вероятностное значение, то есть значение, для которого вероятность или плотность вероятности достигает максимума.

**Определение 41.10.** Медианой $Me(X)$ СВ $X$ называется такое значение, для которого вероятность того, что случайная величина примет значение меньше медианы или больше ее, одна и та же и равна $\frac{1}{2}$, т.е. $P(X<Me(X))=P(X>Me(X))=\frac{1}{2}$.

**Пример.** ДСВ $X$ задана законом распределения:

| $X$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,4 |

Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

$\triangleleft$ $M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=-1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}4=0{,}9$.

$$M\left(X^2\right)=\sum_{i=1}^{n}x^2{}_i p_i=(-1)^2\cdot 0{,}2+0^2\cdot 0{,}1+1^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}4=2{,}1.$$

Тогда, $D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2=2{,}1-0{,}9^2=1{,}29$.

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1{,}29}\approx 1{,}14$. $\triangleright$

## Некоторые стандартные законы распределений

1. ДСВ $X$ имеет ***биномиальный закон распределения***, если она принимает свои возможные значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots, n$ с вероятностями: $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $0<p<1$, $q=1-p$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, т.е. вероятности $P(X=k)$ вычисляются по формуле Бернулли.

Математическое ожидание и дисперсия СВ X, распределенной по биномиальному закону с параметрами $n$ и $p$, равны: $M(X)=np$ и $D(X)=npq$.

Биномиальный закон распределения используется в практике статического контроля качества продукции, в теории стрельбы, при описании функционирования систем массового обслуживания и др.

2. ДСВ $X$ имеет ***закон распределения Пуассона***, если она принимает свои возможные значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями: $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$.

Эта формула определяет закон распределения массовых ($n$ велико) и маловероятных ($p$ мало) событий, его иначе называют законом маловероятных явлений. По закону Пуассона распределено число сбоев на автоматической линии, число отказов сложной системы в нормальном режиме, число требований на обслуживание, поступивших в единицу времени в системах массового обслуживания и др.

Математическое ожидание и дисперсия СВ $X$, распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda = np$, совпадают и равны параметру $\lambda$ этого закона: $M(X)=D(X)=\lambda$.

**Пример.** Составить закон распределения ДСВ $X$ – числа появлений герба при двух бросаниях монеты. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

$\lhd$ Вероятность выпадения герба при одном бросании $p=0{,}5$, а $q=0{,}5$. СВ $X$ – число выпадений герба при двух бросаниях монеты, может принимать значения 0, 1, 2. Определим вероятности этих значений:

$$P(X=0)=P_2(0)=C_2^0\cdot 0{,}5^0\cdot 0{,}5^2=0{,}25,$$

$$P(X=1)=P_2(1)=C_2^1\cdot 0{,}5^1\cdot 0{,}5^1=0{,}5,$$

$$P(X=2)=P_2(2)=C_2^2\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}5^0=0{,}25.$$

Закон распределения СВ $X$ будет иметь вид:

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,25 | 0,5 | 0,25 |

Так как СВ $X$ распределена по биномиальному закону с параметрами $n=2, p=0{,}5, q=0{,}5$, то $M(X)=np=2\cdot 0{,}5=1$, $D(X)=npq=$ $=2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}5$, $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}7$. $\rhd$