Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема повторных испытаний

Полная группа несовместных событий

- События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют ***полную группу несовместных событий*** в вероятностном пространстве (Ω, *F*, *P*), если:
  - 1) они являются попарно независимыми:

$$H_i \cap H_j = \varnothing, \; i \neq j \,;$$

  - 2) сумма событий образует пространство элементарных исходов: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

Формула полной вероятности

- Пусть некоторое событие A может произойти при различных условиях, относительно которых может быть сделано n предположений (гипотез): $H_1, H_2, ..., H_n$.
- Если события $H_1, H_2, ..., H_n$, $P(H_k) > 0$ образуют полную группу несовместных событий в вероятностном пространстве (Ω, F, P), то $\forall A \in F$ справедлива формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i)$$

- $\triangleleft$ Действительно, $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$. Так как $(AH_i)\cdot(AH_j) = \varnothing$ при $i \neq j$, то:

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} AH_i\right) =$$

$$= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n). \triangleright$$

Пример 1:

- В двух контейнерах имеются резисторы. В первом контейнере – 20 резисторов, из которых четыре являются нестандартными; во втором – 10 резисторов, из них один является нестандартным. Из первого контейнера наудачу взяли резистор и переложили во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный из второго контейнера резистор будет нестандартным.

Формула Байеса

- Пусть некоторое событие A может произойти при различных условиях, относительно которых может быть сделано n предположений (гипотез): $H_1, H_2, \dots, H_n$
- Если события $H_1, H_2, \dots, H_n$, $P(H_k) > 0$ образуют полную группу несовместных событий в вероятностном пространстве

  (Ω, F, P), то $\forall A \in F$ справедлива формула Байеса:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}$$

- $\triangleleft P(A \cdot H_k) = P(A)P(H_k / A) = P(H_k)P(A / H_k)$,

k=1,2,...n.

Выразим $P(H_k / A)$:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A / H_k)}{P(A)}.$$

Преобразуя знаменатель по формуле полной вероятности, получим:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}, \ (k=1,2,...n). \ \triangleright$$

Пример 2:

- Пусть в условиях примера 1 из второго контейнера извлечен нестандартный резистор. Требуется определить, какой резистор вероятнее всего был переложен из первого контейнера во второй.

Схема повторных испытаний

- Проводится серия из n независимых испытаний.
- во время каждого испытания проводится один и тот же опыт, в результате которого возможны два исхода:
  - наступит событие A, $P(A)=p=const$
  - или наступит событие $\overline{A}$, $P(\overline{A})=1-p=q$,

$m-$ число успехов (наступлений события A) в серии.

Формула Бернулли

- Пусть $P_n(m)$ – вероятность того, что в n испытаниях m раз наступит событие A.
- Тогда: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где
  - p – вероятность успеха в одном испытании;
  - $q = 1 - p$;
  - C_n^m – биномиальный коэффициент.

Пример 3:

- Стрелок поражает мишень одним выстрелом с вероятностью $p=0,8$. Определить, с какими вероятностями он поразит мишень 0, 1, 2, 3, 4, 5 раз в серии из 5 выстрелов?

Наивероятнейшее число

- Число m^* такое, что $P_n(m^*) = \max\limits_{0 \le m \le n} P_n(m)$
- Справедлива оценка:

$$np - q \le m^* \le np + q$$

- Пример 4. Найти наивероятнейшее число попаданий в условиях примера 3.
- Пример 5. Определить наивероятнейшее число появлений герба при пятидесяти подбрасываниях монеты.

Формула Пуассона (закон редких событий)

- $P_n(m) \approx \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, где
  - $\lambda = np$;
  - n – общее число испытаний $(n \to \infty)$;
  - p– вероятность успеха в одном испытании $(p \to 0)$;
  - m – число успехов.
- Условие применения формулы: $np < 10$;

Пример 6:

- Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. В заданный интервал времени любой абонент независимо от остальных может сделать вызов с вероятностью 0,005. Какова вероятность того, что в данный интервал времени будет 7 звонков?

Локальная теорема Муавра-Лапласа

- Пусть вероятность p появления некоторого события A постоянна в n независимых испытаниях и отлична от 0 и 1. Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в этих испытаниях событие A наступит m раз при $n \to \infty$, удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{npq}\, P_n(m)}{\varphi(x)} = 1,$$

  - где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, а $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

- **Замечание.** При $np<10$:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$ – формула Муавра – Лапласа.

Пример 7:

- Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0.4. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

- Пусть вероятность p появления некоторого события A постоянна в n независимых испытаниях и отлична от 0 и 1. Тогда вероятность того, что m – число появления события A при n испытаниях – заключено между

$a = np + \alpha\sqrt{npq}$ и $b = np + \beta\sqrt{npq}$ $\quad (a < b)$

удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(a < m < b)}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)} = 1$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$ – функция Лапласа, $x \in R$, а

$\alpha = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}$ и $\beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$.

- **Замечание.** При достаточно больших n

$P(a < m < b) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ – интегральная формула Муавра – Лапласа.

Свойства функции Лапласа

- 1) $\Phi(0)=0$;
- 2) $\Phi(x)$ – нечетная функция;
- 3) $\Phi(\infty)=\dfrac{1}{2}$.

Пример 8:

- При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 75% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 100 изделий число первосортных заключено между 70 и 80 деталями?