Лекция 4. Векторное и смешанное произведения векторов

Упорядоченная тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарных векторов называется **правой (левой)**, если, приведя их к общему началу, кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден из конца третьего вектора $\vec{c}$ совершающимся **против (по)** часовой стрелки (рис. 4.1).

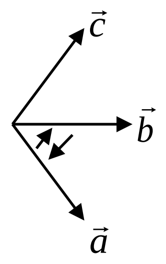


Рис.4.1

Имеет место **циклическое правило**: при циклической (по кругу в любую сторону) перестановке векторов ориентация тройки векторов не меняется (рис. 4.2), т.е если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка, то $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$; $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$ – правые.

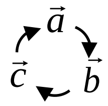


Рис.4.2

Тройка базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – правая по определению. Тогда по циклическому правилу $\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}$, и $\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}$ – тоже правые, а тройки $\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}$; $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$; $\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}$ – левые.

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (рис. 4.3), который определяется условиями:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку;

3) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е.

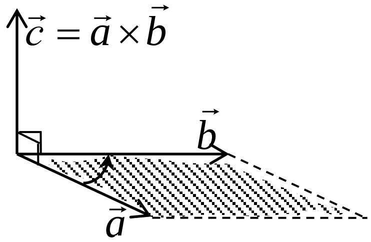


Рис.4.3

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}});$$

Для коллинеарных векторов: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Свойства векторного произведения

1°. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;

2°. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (условие коллинеарности);

3. свойство линейности по любому сомножителю, например, по первому:

$$(\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2) \times \vec{b} = \lambda_1(\vec{a}_1 \times \vec{b}) + \lambda_2(\vec{a}_2 \times \vec{b}), \text{ где } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, и равное скалярному произведению первого вектора на вектор равный векторному произведению второго и третьего векторов, т.е. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Теорема. Смешанное произведение некомпланарных векторов по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах: $V_{пар}=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

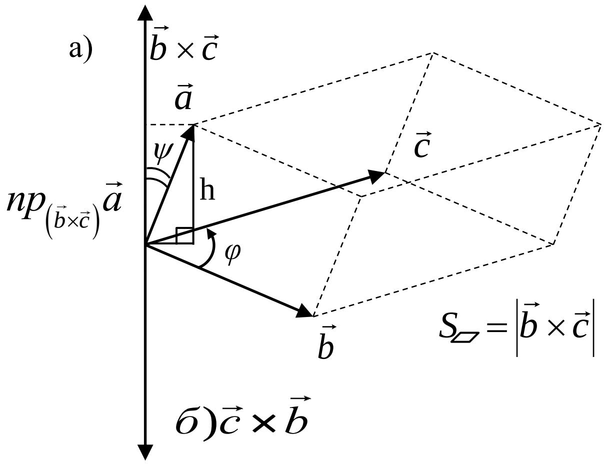


Рис.4.4

⊲ а) если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка, тогда угол $\psi=\left(\vec{a};\hat{}\,(\vec{b}\times\vec{c})\right)$– острый (рис.4.4) и высота параллелепипеда построенного на данных векторах равна: $h=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\psi=np_{(\vec{b}\times\vec{c})}\vec{a}>0$;

б) если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – левая тройка, тогда угол ψ – тупой и $h=-np_{(\vec{b}\times\vec{c})}\vec{a}>0$.

Рассмотрим смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$. Используя формулу для вычисления скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\,\vec{a}$, и то, что $S\;=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$, получим:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cdot np_{(\vec{b}\times\vec{c})}\vec{a}=$$

$$=\begin{cases} S\cdot h=V_{пар};\ если\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}-правая\ тройка;\\ S\cdot\left(-h\right)=-V_{пар};\ если\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}-левая\ тройка.\end{cases}$$ ⊳

Свойства смешанного произведения

1°. При циклической перестановке множителей смешанное произведение не меняется: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

2°. Пусть $\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{c}\neq\vec{0}$. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарны.

3°. Смешанное произведение не изменится при перестановке знаков скалярного и векторного произведений: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

4°. При нециклической перестановке векторов-сомножителей смешанное произведение меняет свой знак: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}$.

5°. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0\Leftrightarrow\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка и $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0\Leftrightarrow\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – левая тройка.

6°. Свойство линейности по каждому сомножителю, например, по первому: $(\lambda_1\cdot\vec{a}_1+\lambda_2\cdot\vec{a}_2)\vec{b}\,\vec{c}=\lambda_1(\vec{a}_1\vec{b}\,\vec{c})+\lambda_2(\vec{a}_2\vec{b}\,\vec{c})$, где $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$.

⊲ Используем свойство линейности скалярного произведении:

$$(\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2)\vec{b}\,\vec{c}=(\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2)\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\lambda_1\vec{a}_1\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+$$
$$+\lambda_2\vec{a}_2\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\lambda_1(\vec{a}_1\vec{b}\,\vec{c})+\lambda_2(\vec{a}_2\vec{b}\,\vec{c})\ \triangleright$$

Выражение векторного и смешанного произведений через координаты

Из свойства 2° векторного произведения следует, что $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$, а из определения векторного произведения и циклического правила следует:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}=-\left(\vec{j}\times\vec{i}\right),\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}=-\left(\vec{k}\times\vec{j}\right),\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}=-\left(\vec{i}\times\vec{k}\right).$$

Тогда, если векторы заданы координатами

$\vec{a}=\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right),\vec{b}=\left(b_x;\ b_y;\ b_z\right),\vec{c}=\left(c_x;\ c_y;\ c_z\right)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$
$$a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+$$
$$+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+$$
$$+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})=$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}=$$
$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}.$$

Полученную формулу можно записать короче в виде определителя:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Это – условная запись, т.к. элементы определителя неоднородны (в первой строке стоят векторы, в других – числа).

Используя формулу для нахождения векторного и скалярного произведений, найдем выражение смешанного произведения векторов через координаты векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=c_x\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}. \qquad (4.1).$$

Полученную формулу можно записать короче: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$,

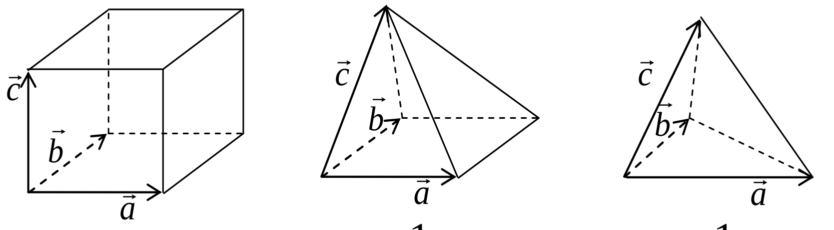
так как правая часть равенства (4.1) представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам третьей строки.

Задачи, решаемые с помощью векторного и смешанного произведения

• Нахождение площадей **S – параллелограмма и S**$_\Delta$ **– треугольника** с помощью векторное произведения (в три шага):

1) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$; 2) $|\vec{c}| = \sqrt{c_x^{\,2} + c_y^{\,2} + c_z^{\,2}}$; 3) $S = 2S_\Delta = |\vec{c}|$.

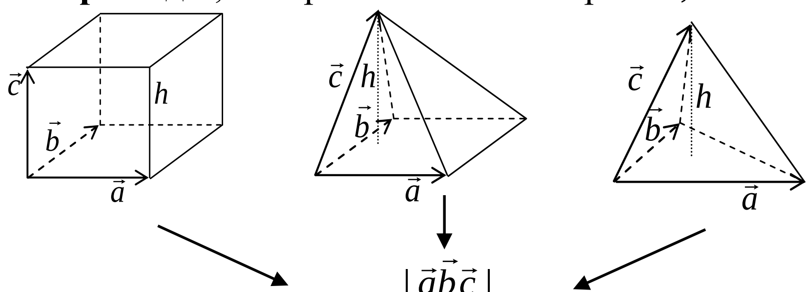
• Нахождение **объема параллелепипеда, четырехугольной и треугольной пирамиды**, построенных на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис.4.5).



$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \qquad V = \frac{1}{3}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \qquad V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

Рис.4.5

• Нахождение **высоты параллелепипеда, четырехугольной и треугольной пирамиды**, построенных на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис.4.6).



$$h = \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Рис.4.6

• Определение **взаимной ориентации векторов** в пространстве и установление **компланарности** векторов (рис.4.7).

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$
⇩	⇩	⇩
Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют **левую тройку** векторов	Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **компланарные**	Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют **правую тройку** векторов

Рис.4.7

Пример. Дана пирамида (рис.4.8): $A(0;\ 1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ 2)$, $C(-1;\ 2;\ 2)$, $D(-1;\ 3;\ 1)$. Найти: 1) площадь основания ABC; 2) объем пирамиды; 3) длину высоты, опущенной на основание ABC.

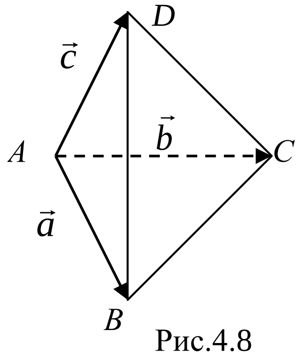


Рис.4.8

$\lhd$ 1) Так как $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(1;\ 1;\ 0)$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(-1;\ 1;\ 0)$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}=(-1;\ 2;\ -1)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=0\vec{i}+0\vec{j}+2\vec{k}=(0;\ 0;\ 2)=\vec{f}.$$

Тогда $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\vec{f}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{0+0+4}=1$ (*кв.ед.*).

2) $\vec{a}\,\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-2.$ $V=\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\vec{c}\right|=\dfrac{1}{6}\left|-2\right|=\dfrac{1}{3}$ (*куб.ед.*).

3) Так как $V=\dfrac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$. Следовательно, $h=\dfrac{6V}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}=\dfrac{2}{2}=1$ (*ед.*). $\rhd$