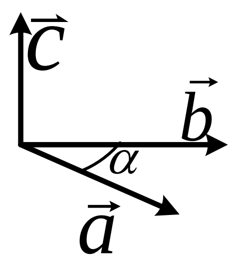
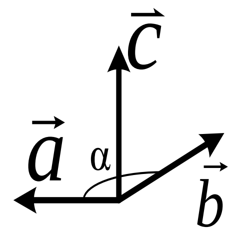
Лекция 4: Векторное и смешанное произведения векторов

Упорядоченная тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарных векторов называется правой (левой), если, приведя их к общему началу, кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден из конца третьего вектора $\vec{c}$ совершающимся против (по) часовой стрелки

правая



левая

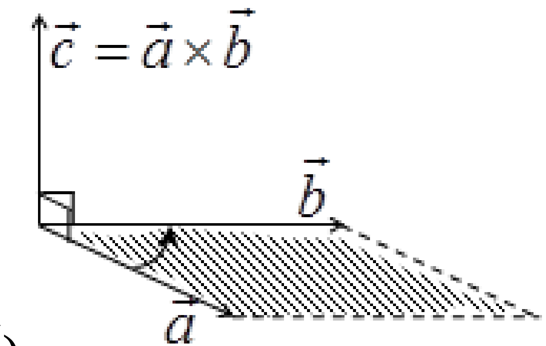


Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\left(\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}\right)$ и удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е. $|\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$



Свойства векторного произведения

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$
2. $\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$
3. $(\lambda_1\cdot\vec{a}_1 + \lambda_2\cdot\vec{a}_2)\times\vec{b} = \lambda_1(\vec{a}_1\times\vec{b}) + \lambda_2(\vec{a}_2\times\vec{b})$

Смешанное произведение векторов (векторно-скалярное)

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, и равное скалярному произведению первого вектора на вектор равный векторному произведению второго и третьего векторов, т.е.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Свойства смешанного произведения

1. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$
2. Пусть $\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{c}\neq\vec{0}.\ \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарны
3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$
4. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}.$
5. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка и $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – левая
6. $(\lambda_1\cdot\vec{a}_1 + \lambda_2\cdot\vec{a}_2)\vec{b}\,\vec{c} = \lambda_1(\vec{a}_1\vec{b}\,\vec{c}) + \lambda_2(\vec{a}_2\vec{b}\,\vec{c})$

Векторное произведение векторов в ***координатной форме***:

$$\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right) \quad \vec{b}\left(b_x;b_x;b_z\right) \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

Смешанное произведение векторов в ***координатной форме***:

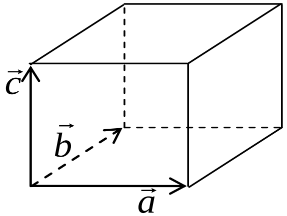
$$\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right) \quad \vec{b}\left(b_x;b_x;b_z\right) \quad \vec{c}=\left(c_x;\ c_y;\ c_z\right) \Rightarrow \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

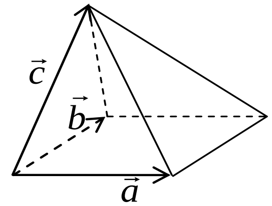
Задачи, решаемые с помощью векторного и смешанного произведения

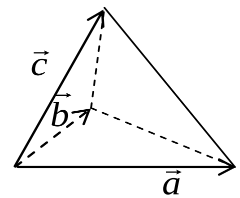
- Нахождение площадей **S – параллелограмма и S$_\Delta$ – треугольника** с помощью векторное произведения (в три шага):

1) $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$; 2) $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{c_x{}^2+c_y{}^2+c_z{}^2}$; 3) $S=2S_\Delta=\left|\vec{c}\right|$.

- Нахождение **объема параллелепипеда, четырехугольной и треугольной пирамиды**, построенных на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

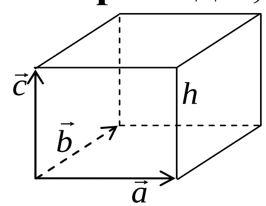


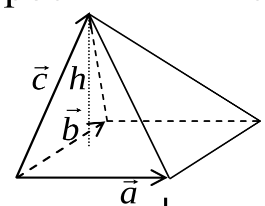


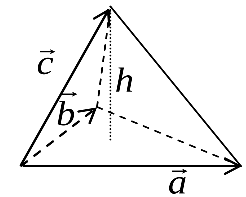


$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| \qquad V=\frac{1}{3}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| \qquad V=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$$

- Нахождение **высоты параллелепипеда, четырехугольной и треугольной пирамиды**, построенных на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$







$$h=\frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$$

- Определение **взаимной ориентации векторов** в пространстве и установление **компланарности** векторов

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$
Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют **левую тройку** векторов	Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **компланарные**	Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют **правую тройку** векторов