Условная вероятность

Рассмотрим эксперимент, вероятностная модель которого (Ω, F, P). Повторим эксперимент n раз. Обозначим через n_B количество экспериментов, в которых произошло событие B, через n_{AB} количество экспериментов, в которых произошло событие AB, где $A, B \in \mathrm{F}$. Если имеет место устойчивость частот

$$\frac{n_B}{n} \approx P(B), \quad \frac{n_{AB}}{n} \approx P(AB)$$

и $P(B) > 0$, то относительная частота $\frac{n_{AB}}{n_B}$ события A при условии, что произошло событие B также устойчива и

$$\frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{n_{AB}/n}{n_B/n} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Определение 39.1. Пусть $P(B) > 0$. Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B назовем отношение

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (39.1)$$

Условная вероятность $P(A/B)$ обозначается также $P_B(A)$.

В связи с появлением термина “условная вероятность” будем вероятность события называть также безусловной вероятностью события.

Рассмотрим теперь условную вероятность $P(A/B)$ как функцию события A.

Утверждение 39.1. Условная вероятность $P(A/B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности $P(A)$.

Смысл этого утверждения заключается в том, что условная вероятность представляет собой безусловную вероятность, заданную на новом пространстве Ω_1 элементарных исходов, совпадающем с событием B.

Пример 39.1. Из урны, в которой $a = 7$ белых и $b = 3$черных шаров, наугад без возвращения извлекают два шара. Пусть

событие A_1={ первый извлеченный из урны шар является белым },

событие A_2={ второй извлеченный из урны шар является белым }.

Найти $P(A_2 / A_1)$.

$\lhd$ Рассмотрим два способа решения этой задачи.

Первый способ.

В соответствии с определением условной вероятности (39.1), имеем: $P\left(A_2/A_1\right)=\dfrac{P\left(A_1A_2\right)}{P\left(A_1\right)}=\dfrac{C_7^2/C_{10}^2}{C_7^1/C_{10}^1}=\dfrac{2}{3}.$

Второй способ.

Перейдем к новому пространству Ω_1 элементарных исходов. Так как событие A_1 произошло, то это означает, что в новом пространстве элементарных исходов всего равновозможных исходов $n_{\Omega_1}=a+b-1=9$, а событию A_2 благоприятствует при этом $m_{A_2}=a-1=6$ исходов. Следовательно, $P\left(A_2/A_1\right)=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}.$ ▷

Замечание. Аналогичным образом может быть введена условная вероятность

$$P\left(B/A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)},\ \ P\left(A\right)>0. \tag{39.2}$$

Формулы (39.1) и (39.2) дают возможность вычислять вероятность произведения событий

$$P\left(A\cdot B\right)=P\left(B\right)\cdot P\left(A/B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B/A\right), \tag{39.3}$$

если вероятности в правой части известны. Формулу (39.3) называют ***формулой умножения вероятностей***. Она может быть обобщена на случай произведения конечного числа событий:

$$P\left(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2/A_1\right)\cdot P\left(A_3/A_2A_1\right)\cdot\ldots\cdot P\left(A_n/A_{n-1}A_{n-2}\ldots A_1\right). \tag{39.4}$$

Пример 39.2. На семи карточках написаны буквы, образующие слово “СОЛОВЕЙ”. Карточки перемешивают и из них наугад последовательно извлекают и выкладывают слева направо три карточки. Найдем вероятность того, что получится слово “ВОЛ” (событие A).

◁ Рассмотрим

событие A_1 ={ на первой выбранной карточке написана буква “В”},

событие A_2 ={ на второй выбранной карточке написана буква “О”},

событие A_3 ={ на третьей выбранной карточке написана буква “Л”}.

Тогда $A=A_1A_2$. Следовательно, используя формулу (39.4), имеем: $P\left(A\right)=P\left(A_1A_2A_3\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2/A_1\right)\cdot P\left(A_3/A_2A_1\right).$

Согласно классическому определению вероятности, имеем $P\left(A_1\right)=\dfrac{1}{7}.$ Если событие A_1 произошло, то осталось шесть карточек, на которых буква “О” встречается два раза, поэтому условная вероятность $P\left(A_2/A_1\right)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}.$

Аналогично $P\left(A_3/A_2A_1\right)=\dfrac{1}{5}.$

Окончательно получаем $P(A)=P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{105}$. ▷

Независимые события

Условная вероятность $P(A/B)$ события A при условии, что событие B произошло, может как совпадать с безусловной вероятностью $P(A)$, так и не совпадать, т.е. наступление события B может влиять или не влиять на вероятность события A. Поэтому естественно степень связи (или степень зависимости) событий A и B оценивать путем сопоставления их условных вероятностей $P(A/B)$, $P(B/A)$ с безусловными.

Определение 39.2. События A и B, имеющие ненулевую вероятность, называют ***независимыми***, если

$$P(A/B)=P(A) \text{ или } P(B/A)=P(B). \tag{39.5}$$

В противном случае события A и B называют ***зависимыми***.

Утверждение 39.2. (Необходимое и достаточное условие независимости событий)

События A и B, имеющие ненулевую вероятность, являются независимыми тогда и только тогда, когда $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.
(39.6)

Пример 39.3. Из колоды карт, содержащей n = 36 карт, наугад извлекают одну карту. Обозначим через

A = { извлеченная карта пиковой масти},

B = { извлеченная карта является “дамой”}.

Определить, являются ли зависимыми события A и B.

◁ После вычислений получаем $P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$,

$P(A\cdot B)=\frac{1}{36}$, $P(B/A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{9}{36}}=\frac{1}{9}=P(B)$, т.е. выполняется равенство (39.5), и поэтому события A и B независимы.

Отметим, что также имеет место и равенство (39.6): $P(A\cdot B)=\frac{1}{36}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}=P(A)\cdot P(B)$.

Следовательно, события A и B независимы. ▷

Пример 39.4. Изменим теперь условия опыта, дополнительно добавив в колоду, допустим, N = 100 “пустых” карт (без рисунка). Изменится ли ответ?

◁ Имеем $P(B)=\dfrac{4}{136}=\dfrac{1}{34}$, т.е. безусловная вероятность события B уменьшилась. Однако условная вероятность $P(B/A)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{136}}{\frac{9}{136}}=\dfrac{1}{9}=P(B)$ не изменилась, т.е события A и B стали зависимыми. ▷

Утверждение 39.3. Если события A и B независимые, то независимыми также являются пары событий $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$, если вероятности соответствующих событий ненулевые.

◁Действительно, в силу независимости событий A и B имеем:

$$P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)=1-P(A)=P(\overline{A}),$$

что означает независимость событий $\overline{A}$ и B. Независимость остальных пар событий можно доказать аналогично.▷

Определение 39.3. События $A_1, A_2, ..., A_n$ называют ***независимыми в совокупности,*** если вероятность произведения любых двух различных событий равна произведению вероятностей этих событий; вероятность произведения любых трех событий равна произведению их вероятностей;...; вероятность произведения всех событий равна произведению их вероятностей.

Если только любые два события из данной совокупности являются независимыми, то говорят о ***попарной независимости событий*** из этой совокупности. Так же как и в случае двух событий, можно показать, что на вероятность каждого из независимых в совокупности событий не оказывает влияние появление или непоявление остальных событий.

Замечание. В силу определения независимости событий в совокупности формула (39.4) умножения вероятностей для независимых в совокупности событий имеет вид

$$P(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n). \qquad (39.7)$$

Запишем формулу для вероятности суммы независимых событий. Пусть $A=A_1+A_2+...+A_n$. Тогда в соответствии с законом де Моргана $\overline{A}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot ...\cdot\overline{A}_n$. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы, то и события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ также независимы и, значит, $P(\overline{A})=P(\overline{A}_1)\cdot ...\cdot P(\overline{A}_n)$. Отсюда окончательно получаем:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot ...\cdot\overline{A}_n)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot ...P(\overline{A}_n)=$$
$$=1-(1-P(A_1))\cdot ...\cdot(1-P(A_n)).$$

Таким образом, доказали

Утверждение 39.4. (вероятность суммы независимых событий)

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-(1-P(A_1))\cdot ...\cdot(1-P(A_n)) \qquad (39.8)$$

Замечание. Этой формулой удобно пользоваться, когда необходимо найти вероятность появления хотя бы одного события из совокупности независимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

Пример 39.5. Вероятность изготовления бракованного генератора для автомобильного двигателя $0,0003$. Найти вероятность того, что в изготовленной партии из 20 генераторов окажется хотя бы один бракованный.

◁ Обозначим A = {в партии из 20 генераторов окажется хотя бы один бракованный},

A_i={ i -тый генератор в партии бракованный}, $i = \overline{1,20}$.

$A = A_1 + A_2 + ... + A_{20}$.

Так как $P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_{20}) = 1 - 0,0003 = 0,9997$ и события $A_1, A_2, ..., A_{20}$ независимые, то, применяя формулу (39.8), получим:

$P(A) == 1 - (1 - P(A_1)) \cdot ... \cdot (1 - P(A_n)) = 1 - 0,9997^{20} \approx 0,006$. ▷

Понятие независимости является очень важным в теории вероятностей. При этом следует различать формальное понятие независимости событий, определяемое свойствами вероятностной модели, и понятие независимости событий, возникающее в прикладных задачах и означающее, что события не связаны причинно. При корректном построении вероятностной модели второе трансформируется в первое, но это может быть не всегда.