Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей

- Пусть n – общее число экспериментов;
  n_B– количество экспериментов, в которых произошло событие B;
  n_{AB}– количество экспериментов, в которых произошло событие AB.

- Если $\frac{n_B}{n} \approx P(B)$, $\frac{n_{AB}}{n} \approx P(AB)$ и $P(B) > 0$, то

$$\frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{n_{AB}/n}{n_B/n} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Условная вероятность

- $P(A/B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}$ – условная вероятность события A при условии, что произошло событие B $\left(P(B)>0\right)$.
- Второе обозначение: $P_B(A)$.
- Аналогично: $P(B/A)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)},\ \ P(A)>0.$
- Условная вероятность обладает всеми свойствами безусловной вероятности .

Пример:

- Из урны, в которой $a = 7$ белых и $b = 3$ черных шаров, наугад без возвращения извлекают два шара. Пусть

  событие $A_1 =\{$ первый извлеченный из урны шар является белым $\}$,

  событие $A_2 =\{$ второй извлеченный из урны шар является белым $\}$.

  Найти $P\left(A_2 / A_1\right)$.

Формулы умножения вероятностей

- $P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A)$
- $P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_{n-1}A_{n-2}\ldots A_1)$

Пример:

- На семи карточках написаны буквы, образующие слово «СОЛОВЕЙ». Карточки перемешивают и из них наугад последовательно извлекают и выкладывают слева направо три карточки. Найти вероятность того, что получится слово «ВОЛ».

Независимые события

- События A и B, имеющие ненулевую вероятность, **независимы,** если
$P(A/B)=P(A)$ или $P(B/A)=P(B)$
- В противном случае события A и B называют **зависимыми.**
- События A и B, имеющие ненулевую вероятность, являются независимыми тогда и только тогда, когда
$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

Примеры:

- 1. Из колоды карт, содержащей 36 карт, наугад извлекают одну карту. Обозначим через

  A= { извлеченная карта пиковой масти},

  B= { извлеченная карта является «дамой»}.

  Определить, являются ли зависимыми события A и B.

- 2. Изменим теперь условия опыта, дополнительно добавив в колоду, 100 «пустых» карт (без рисунка). Изменится ли ответ?

- Если события A и B независимы, то независимы также пары событий $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$, если вероятности соответствующих событий ненулевые.

$\triangleleft$ Действительно,

$$P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - P(A) = P(\overline{A})$$

Независимость остальных пар событий можно доказать аналогично. $\triangleright$

Независимость в совокупности. Попарная независимость

- События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют **независимыми в совокупности**, если вероятность произведения любых двух различных событий равна произведению вероятностей этих событий; вероятность произведения любых трех событий равна произведению их вероятностей;...; вероятность произведения всех событий равна произведению их вероятностей.
- Если только любые два события из данной совокупности являются независимыми, то говорят о **попарной независимости событий** из этой совокупности.

- $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$ – формула умножения вероятностей для независимых в совокупности событий.

- $P\left(A_1 + A_2 + \ldots A_n\right) = 1 - \left(1 - P\left(A_1\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - P\left(A_n\right)\right)$ – формула для вероятности суммы независимых событий.

Пример:

- Вероятность изготовления бракованного генератора для автомобильного двигателя $0{,}0003$. Найти вероятность того, что в изготовленной партии из 20 генераторов окажется хотя бы один бракованный.