Дискретное вероятностное пространство

Для практической деятельности важно уметь сравнивать события по степени возможности их наступления. Например, интуитивно ясно, что при последовательном извлечении из колоды пяти карт более возможна ситуация, когда появились карты разных мастей, чем появление пяти карт одной масти; при десяти бросках монеты более возможно чередование гербов и цифр, нежели выпадение подряд десяти гербов, и т.д. Поэтому для сравнения событий нужна определенная мера.

Численную меру степени объективной возможности наступления события называют***вероятностью события***. Это определение, *качественно* отражающее понятие вероятности события,не являетсяматематическим. Чтобы оно таковым стало, необходимо определить его *количественно.*

Сделаем это аксиоматически (пока для случая дискретного пространства элементарных исходов). Для этого:

– каждому элементарному исходу ω_i поставим в соответствие (припишем) некоторое разумным способом определенное положительное число $p(\omega_i)=p_i$, т.е. $\omega_i \to p(\omega_i)$.

– сумма всех чисел $p(\omega_i)$ должна равняться 1. При этом чисел $p(\omega_i)$ столько, сколько элементов в пространстве элементарных исходов Ω, т.е. $\sum\limits_{\omega_i\in\Omega} p(\omega_i)=1.$

–***вероятностью случайного события*** A будем называть значение суммы тех чисел $p(\omega_i)$, которые соответствуют элементарным исходам, благоприятствующим наступлению события A:

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A} p(\omega_i). \tag{38.1}$$

Определение 38.1. Будем говорить, что задано ***вероятностное пространство***, если задано пространство элементарных исходов Ω и определено соответствие$\omega_i \to p(\omega_i)=p_i$.

Возникает вопрос, как из конкретных условий решаемой задачи определить вероятности $p(\omega_i)$ элементарных исходов?

Классическое определение вероятности

Рассмотрим один из простейших методов определения наборов положительных чисел $p(\omega_i)$.

Для этого рассмотрим испытания, в которых:

1) пространство элементарных исходов Ω имеет конечное число элементов, т.е. $|\Omega|=n$, где $n\in\mathrm{N}$;

2) все элементарные исходы равновозможны, т.е имеют одинаковые возможности на реализацию при однократном проведении опыта.

Замечание. Далее эксперимент, удовлетворяющий данным требованиям, будем называть ***классической схемой (или схемой урн).***

Так как все элементарные исходы данного экспериментыравновозможны, то естественно каждому исходу ω_i поставить в соответствие число $p_i = \frac{1}{n}$. (т.е. $\omega_i \to p(\omega_i) = \frac{1}{n}$).

Ясно, что $\sum\limits_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = \sum\limits_{\omega_i \in \Omega} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

Пусть случайному событию A благоприятствуют $|A| = m$ равновозможных элементарных исходов, тогда (согласно 38.1)

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Итак,

Определение 38.2. В условиях классического эксперимента,***вероятность случайного события*** A равна отношению числа исходов (m), благоприятствующих появлению события A к общему числу (n) элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (38.2)$$

Это есть ***классическое определение вероятности.***

Пример 38.1.Пусть в первом опыте событие A={выпадение не менее 5 очков}. Найдем вероятность события A.

$\triangleleft$ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Все элементарные исходы равновозможные. Общее число элементарных исходов $|\Omega| = n = 6$. Событию $A = \{\omega_5, \omega_6\}$ благоприятствуют $m = |A| = 2$ исхода. Тогда по формуле (38.2) $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. $\triangleright$

Пример 38.2. Пусть в третьем опыте событие A={выпадение не менее одного герба}. Найти вероятность события А.

$\triangleleft$Все элементарные исходы данного опыта равновозможные.
Пространство элементарных исходов: $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $n = |\Omega| = 4$.
Случайному событиюА благоприятствуют 3 элементарных исхода:
ω_1=(Г, Г), ω_3=(Г, Р), ω_4=(Р, Г), т.е. $m = |A| = 3$.

Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$. $\triangleright$

Пример 38.3. Пусть из тщательно перемешанной колоды, содержащей 52 карты, наудачу извлекается одна карта. Какова вероятность того, что это король или туз?

$\lhd$Ясно, что $n = |\Omega| = 52,\ m = |A| = 8$, поэтому $P(A) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$.$\rhd$

Замечание. При нахождении вероятности события с помощью классического определения, как показывает пример 38.3, вовсе необязательно выписывать все элементарные исходы. Достаточно лишь знать их количество, а также количество тех исходов, которые благоприятствуют событию, вероятность которого вычисляется.

Как видим, классическое определение вероятностей есть конструктивное определение – оно не только определяет вероятность события, но и позволяет вычислять ее.

Недостатки классического определения:

1. Не все опыты имеют конечное число исходов.
2. Не всегда исходы опыта равновозможны.

Можно отметить некоторые ***свойства вероятности***, вытекающие из классического определения.

1. $P(\varnothing) = 0$.

$\lhd$Для невозможного события нет благоприятных элементарных исходов, т.е. $m = 0$.$\rhd$

2. $P(\Omega) = 1$.

$\lhd$Достоверному событию благоприятствуют все элементарные исходы, т.е $m = n$.$\rhd$

3. $0 \le P(A) \le 1$.

$\lhd$ т.к. $0 \le m \le n$, то $0 \le \frac{m}{n} \le 1$.$\rhd$

4. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

$\lhd$Если событию A благоприятствуют m элементарных исходов из n, то противоположному событию $\overline{A}$ благоприятствуют оставшиеся $n-m$ элементарных исходов, тогда $P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$.$\rhd$

5. Если A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

$\lhd$Если A и B несовместны, то событию $A+B$ благоприятствуют $m_A + m_B$ элементарных исходов из n. Поэтому $P(A+B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B)$.$\rhd$

Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности обобщает классическое на случай бесконечного пространства элементарных исходовтогда, когда Ω

представляет собой подмножество пространства $\mathbb{R}$ (числовой прямой), $\mathbb{R}^2$ (плоскости), $\mathbb{R}^n$ (n-мерного евклидова пространства).

Пусть случайный эксперимент состоит в том, что мы наудачу бросаем в Ω точку. Будем считать, что:

1) Ω имеет конечную меру (под мерой $\mu(\Omega)$ множества Ω будем понимать его длину, площадь или объем (обобщенный объем) в зависимости от того, какому пространству принадлежит Ω: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^n$));

2) все рассматриваемые подмножества $A \subset \Omega$ имеют конечную меру $\mu(A)$;

3) возможность попадания «случайно брошенной» точки в любое подмножество $A \subset \Omega$ (событие A) пропорциональна мере этого подмножества и не зависит от его расположения и формы. В этом случае говорят, что рассматривается «***геометрическая схема***».

Определение 38.3. ***Вероятностью события*** A называют число $P(A)$, равное отношению меры множества A к мере множества Ω:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \qquad (38.3)$$

Данное определение принято называть ***геометрическим определением вероятности***.

Замечание. Из формулы (38.3) вытекают все свойства вероятности, отмеченные для классического определения.

Пример 38.4. На линии связи длиной 10 км произошел обрыв. Какова вероятность, что он произошел не далее чем в 2 км от начала?

$\triangleleft$ Предполагаем, что линия связи однородна и потому положение точки обрыва равновозможно на любом отрезке линии, где бы он ни располагался. Тогда применимо определение (38.3): $\mathrm{P(A)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. $\triangleright$

Пример 38.5. Двое студентов договорились встретиться на следующих условиях. Каждый из них приходит на место встречи между 10 и 11 часами и ждет не более 15 минут. Найти вероятность того, что встреча состоится.

$\triangleleft$ Для решения задачи воспользуемся геометрической схемой.

Обозначим через $x = \{\textit{момент прихода первого студента}\}$,

$y = \{\textit{момент прихода второго студента}\}$.

Тогда любой элементарный исход ω в данной задаче можно отождествить с некоторой точкой (x, y) на плоскости Oxy. Выберем за начало отсчета 10 часов, а за единицу измерения 1 час и построим на плоскости Oxy пространство элементарных исходов Ω. Очевидно, что это будет квадрат со стороной 1 (см. рис. 38.1). Ясно, что время (ожидания) между приходом встречающихся есть $|x - y|$.

Событие $A = \{встреча\ произойдет\}$ наступит тогда, когда это время не превосходит 15 минут, т.е. $\dfrac{1}{4}$ часа. Поэтому интересующее нас событие описывается неравенством:

$$A = \left\{ (x, y) \in \Omega : \ |x - y| \le \frac{1}{4} \right\}.$$

Геометрически событие A – это часть квадрата между прямыми $x - y = -\dfrac{1}{4}$ и $x - y = \dfrac{1}{4}$ (рис. 38.1).

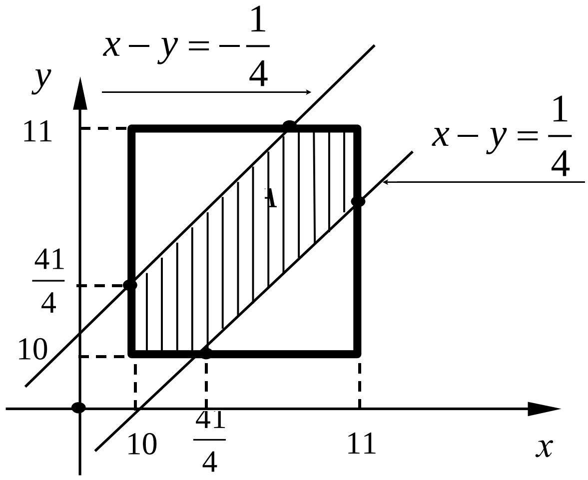

Рис. 38.1

Из рис.(38.1) следует, что площадь заштрихованной области, т.е.

$$\mu(A) = 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}; \qquad \mu(\Omega) = 1^2.$$

Таким образом, согласно геометрическому определению

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{1^2} = \frac{7}{16}. \triangleright$$

Недостатки геометрического определения вероятности.

1. Не всякий опыт и связанные с ним события можно интерпретировать геометрически.

2. При использовании геометрического определения возможна ситуация, когда вероятность события равна 0, однако это событие может произойти, и, следовательно, не является невозможным.

Аксиоматическое определение вероятности

Каждое из введенных ранее определений вероятности имеет свою узкую область применения. Они не являются достаточными для построения общей теории. Чтобы построить теорию вероятностей, непротиворечивую и свободную от ограничений, в ее основу следует положить систему аксиом. Введенные ранее вероятности обладают рядом общих свойств, которые и берут за основу.

Принятая в теории вероятностей система аксиом сформулирована А.Н. Колмогоровым. С помощью нее можно ввести следующее определение.

Определение 38.4. Пусть каждому событию A (т.е. подмножеству A пространства элементарных исходов Ω, принадлежащему σ-алгебре $\mathcal{F}$) поставлено в соответствие число $P(A)$. Числовую функцию P, заданную на σ-алгебре $\mathcal{F}$, называют ***вероятностью (или вероятностной мерой)***, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

A_1: $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A) \geq 0$ – ***аксиома неотрицательности***;

A_2: $P(\Omega)=1$ – ***аксиома нормированности;***

A_3: $\forall A_i \in \mathcal{F}, i \in N, \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ – ***аксиома аддитивности.***

Значение $P(A)$ называют ***вероятностью события A.***

Такое достаточно общее определение вероятности позволяет при рассмотрении тех или иных явлений конкретизировать понятие вероятности в зависимости от специфики задачи. Итак, вероятность – это функция, заданная на σ-алгебре F и принимающая значения на $[0;1]$.

Определение 38.5. Тройку $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, в которой Ω – пространство элементарных исходов, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра его подмножеств и P – вероятностная мера на $\mathcal{F}$, называется ***вероятностным пространством.***

Следствия из аксиом

Следствие 1. $P(\varnothing)=0$.

$\lhd$ $\Omega \cdot \varnothing = \varnothing$, то есть Ω и $\varnothing$ несовместны. $\Omega = \Omega + \varnothing$.
Следовательно, 1 = $P(\Omega)=P(\Omega+\varnothing)=(\text{по}\quad A_3)=1+P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing)=0.$ $\rhd$

Следствие 2. $P(\overline{A})=1-P(A)$.

$\lhd$ $A+\overline{A}=\Omega, A \cdot \overline{A}=\varnothing$. Применяя A_2 и A_3:
$1=P(\Omega)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A).$ $\rhd$

Замечание. Следствие 2 применяют на практике тогда, когда вероятность противоположного события вычислить легче, чем вероятность интересующего нас события.

Следствие 3. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.

$\triangleleft$Действительно, так как $B = A + \overline{A} \cdot B, A \cdot \left(\overline{A} \cdot B\right) = \varnothing$, то, применяя аксиомы A_2, A_3, получаем $P\left(B\right) = P\left(A\right) + P\left(\overline{A} \cdot B\right)$. Отсюда, согласно аксиоме A_1, имеем $P\left(B\right) \geq P\left(A\right)$.$\triangleright$

Следствие 4. $0 \leq P\left(A\right) \leq 1$.

$\triangleleft$В самом деле, так как $\varnothing \subset \mathrm{A} \subset \Omega$, то $0 = \mathrm{P}\left(\varnothing\right) \leq \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) \leq \mathrm{P}\left(\Omega\right) = 1$.$\triangleright$

Следствие 5.

$$\forall A, B \in \mathcal{F}\ P\left(A + B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(AB\right). \qquad (38.4)$$

$\triangleleft$В самом деле, имеем:

$$A + B = A + B \setminus A,\ B = B \setminus A + A \cdot B.$$

Слагаемые в правых частях обоих равенств – несовместные события, следовательно, с учетом аксиомы A_3:

$$P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A) \text{ и } P\left(B\right) = P\left(B \setminus A\right) + P\left(A \cdot B\right)$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$P(A + B) - P(B) = P(A) - P(A \cdot B).\triangleright$$

Замечание 1.Формулу (38.4) называют ***формулой сложения вероятностей двух совместных событий***.

Замечание 2. Если события A и B несовместны, то $P(A \cdot B) = P(\varnothing) = 0$, и равенство (37.4) превращается в

$$P\left(A + B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right). \qquad (38.5)$$

Формула (38.5) есть частный случай аксиомы аддитивности для случая двух событий.

Приведем пример, показывающий, что без учета того, что события совместные, можно прийти к неправильному результату.

Пример 38.6. Опыт состоит в двукратном подбрасывании симметричной монеты. Найдем вероятность события A={появление “герба” хотя бы один раз}.

$\triangleleft$Обозначим

A_i = {появление “герба” при i-м подбрасывании}, i = 1,2.

Ясно, что

$$A = A_1 + A_2 \text{ и } P\left(A_1\right) = P\left(A_2\right) = \frac{1}{2}.$$

Если не учитывать, что A_1, A_2— совместные события, то можно получить “результат”^

$$P\left(A\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

противоречащий здравому смыслу, поскольку ясно, что событие A не является достоверным. Применяя формулу (38.4) сложениявероятностей для двух совместных событий и учитывая равенство $P\left(A_1 \cdot A_2\right) = \frac{1}{4}$, находим $P(A) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) - P\left(A_1 \cdot A_2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$ ▷