ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Дискретное вероятностное пространство

- **Вероятность** – численная мера степени объективной возможности наступления события.
- Рассмотрим случайный эксперимент:
  $\Omega = \{\omega_i\}$ – конечное/счетное множество элементарных исходов.
- Результат эксперимента – событие A
  $$A = \sum_{\omega_i \in A} \omega_i .$$
- Каждому ω_i поставим в соответствие некоторое число $p(\omega_i)$.

- $\omega_i \to p(\omega_i): \quad p(\omega_i) > 0, \ \sum_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = 1;$

  $p(\omega_i)$ – вероятность элементарного

  события ω_i.

- $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i).$

  $P(A)$ – **вероятность события** A.

- (Ω, P) – **дискретное вероятностное пространство**.

Классическое определение вероятности

- **Классическая схема (схема урн)**:

➢ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}, |\Omega| = n, n \in \mathbb{N};$

➢ Все исходы равновозможны, поэтому

$$\omega_i \to p(\omega_i) = \frac{1}{n}.$$

Ясно, что $p(\omega_i) > 0, \sum\limits_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = \sum\limits_{\omega_i \in \Omega} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

- Случайному событию A благоприятствует m элементарных исходов.

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

$\boxed{P(A)=\dfrac{m}{n}}$ **– классическое определение вероятности** (1)

Свойства вероятности (вытекающие из (1)):

- $P(\varnothing)=0;$
- $P(\Omega)=1;$
- $0\le P(A)\le 1;$
- $P(A)=1-P(\overline{A});$
- Если A и B несовместны, то

  $P(A+B)=P(A)+P(B).$

Недостатки классического определения:

1. Не все опыты имеют конечное число исходов.
2. Не все исходы равновозможны.

- Пример 1

  В эксперименте 1 событие $A = \{$выпадение не менее 5 очков$\}$. Найти $P(A)$.

- Пример 2

  В эксперименте 3 событие $A = \{$выпадение не менее 1 герба$\}$. Найти $P(A)$.

- Пример 3

  Из тщательно перемешанной колоды в 52 карты наудачу извлекается одна карта. Найти вероятность того, что это король или туз.

Геометрическое определение вероятности

- Вероятностная модель эксперимента**:**
- Ω имеет конечную меру *μ(Ω)*.
- Все подмножества $A \subset \Omega$ имеют конечную меру *μ(A)*.
- Класс $\mathcal{F}$ измеримых подмножеств Ω является σ-алгеброй.

$$\boxed{P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}}$$ – **геометрическое определение вероятности (2)**

- **Замечание.** Такой эксперимент называют **геометрической схемой**.

- **Пример 4**

  На линии связи длиной 10 км произошел обрыв. Какова вероятность, что он произошел не далее чем в 2 км от начала?

- **Решение:**

  Пусть линия связи однородна, следовательно, положение точки обрыва равновозможно на любом отрезке линии. Тогда применимо определение (2):

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

- ## Пример 5

Двое студентов договорились встретиться на следующих условиях. Каждый из них приходит на место встречи между 10 и 11 часами и ждет не более 15 минут. Найти вероятность того, что встреча состоится.

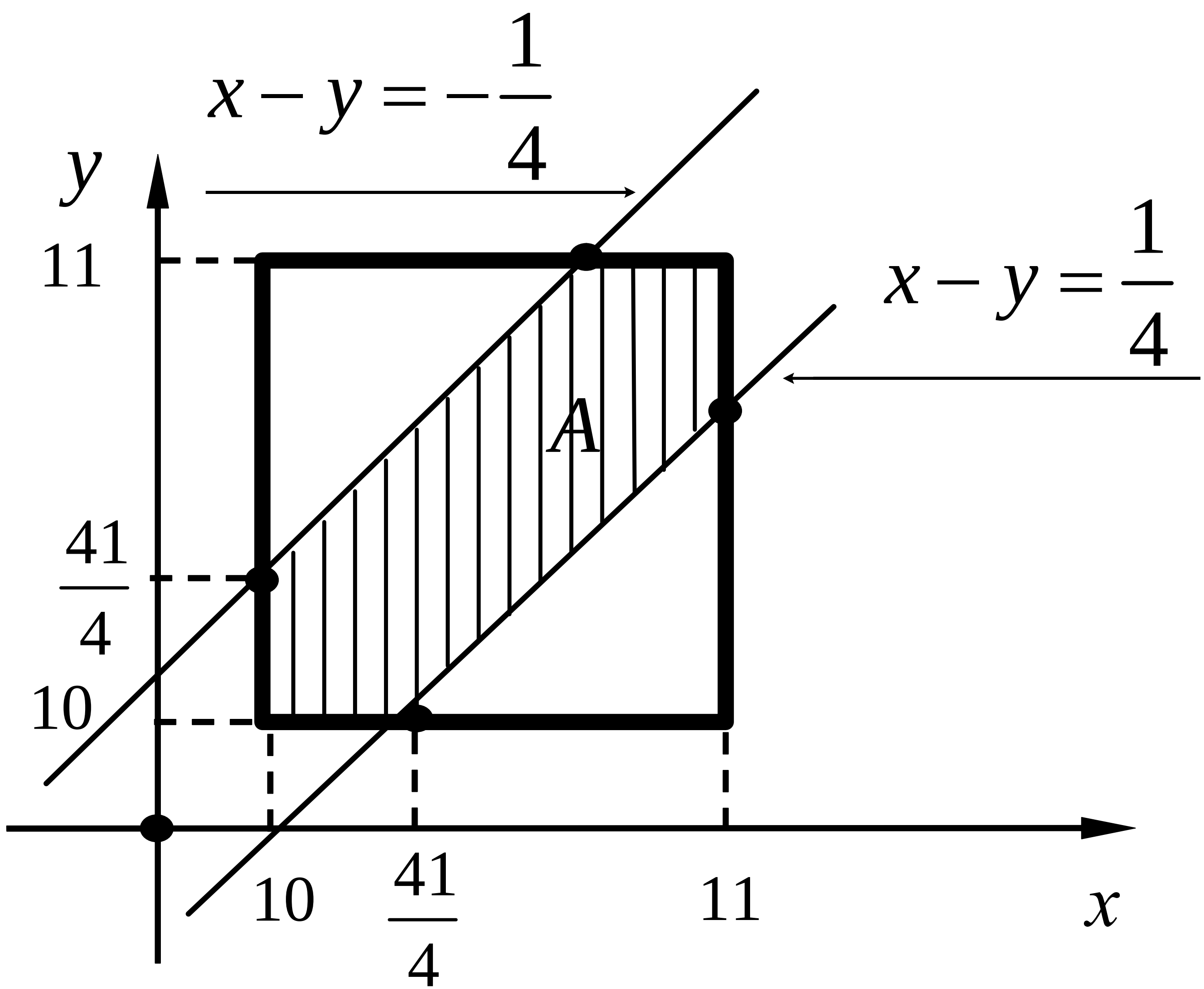
- ## Решение:

x ={момент прихода первого студента},

y ={момент прихода второго студента},

A = {встреча состоится}.

$$A=\left\{(x,y)\in\Omega:\ |x-y|\le\frac{1}{4}\right\}.$$


$x - y = -\frac{1}{4}$
y
11
$x - y = \frac{1}{4}$
A
$\frac{41}{4}$
10
10
$\frac{41}{4}$
11
x

- Из рисунка следует, что площадь заштрихованной области, т.е.

$$\mu(A) = 1^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{7}{16},\quad \mu(\Omega) = 1^2.$$

- Согласно геометрическому определению:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{1^2} = \frac{7}{16}.$$

Недостатки геометрического определения:

1. Не всякий опыт и связанные с ним события можно интерпретировать геометрически.
2. Возможна ситуация, когда вероятность события равна 0, однако это событие может произойти, и, следовательно, не является невозможным.

Аксиоматическое определение вероятности

- Ω – пространство элементарных исходов;
- $\mathcal{F}$ – σ-алгебра событий, $A \in \mathcal{F}$
- Каждому событию A поставим в соответствие число $P(A)$, удовлетворяющее аксиомам:

A_1. $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A) \geq 0 -$ аксиома неотрицательности.

A_2. $P(\Omega) = 1$ – аксиома нормированности.

A_3. $\forall A_i \in \mathcal{F}, i \in N, \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ – аксиома аддитивности.

- $P(A)$ – **вероятность** события A.
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – **вероятностное пространство**.

Следствия из аксиом

- $P(\varnothing)=0$
- $P(\overline{A})=1-P(A)$
- Если $A\subset B$, то $P(A)\le P(B)$
- $0\le P(A)\le 1$
- $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ – формула сложения вероятностей двух совместных событий.

Замечание. Если события A и B несовместны, то $P(A\cdot B)=P(\varnothing)=0$ и

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$