Предмет теории вероятностей

При изучении какого-либо предмета или явления человек проводит опыты (эксперименты), которые можно естественным образом разделить на два класса:

1) Эксперименты, результаты (исходы) которых заранее предсказуемы исходя из естественнонаучных законов. Это так называемые ***детерминированные (неслучайные)*** эксперименты.
2) Эксперименты, результаты которых предсказать невозможно. Это так называемые ***случайные (стохастические)*** эксперименты.

Теория вероятностей изучает закономерности, возникающие в случайных экспериментах.

Однако не все случайные эксперименты можно изучать методами теории вероятности, а лишь те, которые могут быть воспроизведены в одних и тех же условиях (хотя бы теоретически) неограниченное число раз и обладают свойством статистической устойчивости.

Приведем примеры таких экспериментов.

Первый опыт: при подбрасывании симметричной однородной игральной кости трудно предсказать заранее (априори), какое число очков окажется на верхней грани. Возможны шесть исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков.

Второй опыт: подбрасывается симметричная однородная монета. В этом опыте также невозможно предсказать заранее, каким результатом эксперимент закончится: монета упадет гербом вверх или «решеткой» вверх.

Третий опыт:подбрасываются две одинаковые монеты.Данный эксперимент может закончиться одним из четырех исходов:
–обе монеты упали одной стороной гербами вверх;
–обе монеты упали одной стороной «решетками» вверх;
– первая монета упала гербом вверх, вторая – «решеткой»;
– первая монета упала вверх «решеткой», а вторая – гербом.

Принято говорить, что результаты рассмотренных экспериментов являются ***случайными исходами*** или ***случайными событиями***.

Статистическая устойчивость частот

Рассмотрим, в чем состоит общность опытов со случайными исходами. Несмотря на то, что результат каждого такого опыта мы сможем узнать только после его проведения, на практике установлена следующая закономерность: *если эксперимент проводить большое число раз, то частота появления интересующего нас события А*

$$h_A = \frac{M_A}{N},$$

где $N-$*число проведенных опытов,* M_A- *число появлений события А в этих опытах при увеличении* N *стабилизируется, приближаясь к некоторому числу* $P^*(A)$*:*

$$P^*(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{M_A}{N}. \qquad (37.1)$$

Это свойство называют свойством ***статистической устойчивостичастот***. Число $P^*(A)$ служит объективной характеристикой «степени возможности» наступления события А. Его называют ***статистической вероятностью*** события А.

Пример 37.1.В XVIIв. Француз Жорж Луи Бюффон провел $N=4040$ подбрасываний монеты и получил, что частота выпадения герба равна $h_A=\dfrac{2048}{4040}\approx 0,5069$. В XIX веке англичанин Карл Пирсон не поленился провести $N=24000$ подбрасываний и получил $h_A=\dfrac{12012}{24000}\approx 0,5005.$

Видно, что полученные в разных сериях испытаний и в разные века, частоты выпадения герба мало отличаются друг от друга и близки к величине $P^*(A)\approx 0,5$, которую и принимают за вероятность выпадения герба при бросании симметричной монеты.

Замечание.На практике формулой (37.1) практически невозможно пользоваться, т.к. неизвестна зависимость M_A от N. Более того, даже неизвестно, существует ли предел, определяющий $P^*(A)$. Тем не менее, данное определение вероятности полезно тем, что позволяет, например, понять, что значения $P^*(A)\in[0,1]$. Кроме того, если о вероятности ничего неизвестно, то ее хотя бы можно оценить статистически, учитывая, что $h_A\approx P^*(A)$ при $N\to\infty$.

Пространство элементарных исходов

Со случайным опытом могут быть связаны разные по «сложности» случайные события. Прежде всего, среди всевозможных исходов эксперимента можно выделить множество ***взаимно исключающих*** друг друга исходов, которые нельзя разбить на более мелкие в условиях данного опыта. В этом смысле они являются ***элементарными событиями (исходами)***. Так, все исходы в трех опытах, описанных выше, являются элементарными.

Все элементарные исходы, которыми может закончиться рассматриваемый эксперимент, объединяются в множество, которое будем называть ***пространством элементарных исходов (элементарных исходов)*** $\boldsymbol{\Omega}$**.** Элементы этого множества обозначают $\omega_1, \omega_2,\ldots$

Так, **в первом опыте** $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$, ω_k – выпадение k очков на верхней грани кости, k = 1,2,…,6.

Во втором опыте $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$ или $\Omega=\{Г,Р\}$.

В третьем опыте $\Omega=\{(Г,Г);(Р,Р);(Г,Р);(Р,Г)\}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$.

Иными словами, пространство элементарных событий – это множество событий, удовлетворяющих условиям:
1) в результате эксперимента обязательно появляется **одно** из этих событий;
2) появление одного события исключает появление другого;
3) в условиях данного опыта эти события не могут быть разделены на более мелкие.

Результатом проведения опыта может являться не только элементарное событие, но и составное, которое мы будем рассматривать как подмножество пространства элементарных исходов. Эти события, как правило, объединяют в себе элементарные события. Обозначать иные (не элементарные) события будем большими буквами латинского алфавита A,B,C,…

Пример 37.2.

В первом опыте:
событие A={выпадение четного числа очков}, $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$;
событие B={выпадение не менее двух очков}, $B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$
событие H={выпадение нечетного числа очков}, $H=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$.

В третьем опыте:
событие C ={герб выпал не менее одного раза}, $C=\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\}$;
событие D={обе монеты упали одной стороной вверх}, $D=\{\omega_1,\omega_2\}$.

Таким образом, пространство элементарных событий – это математическая модель опыта, в которой каждому событию ставится в соответствие некоторое подмножество пространства Ω.

Множество Ω не обязательно, конечно.

Рассмотрим **четвертый опыт**: монета подбрасывается до первого появления герба и затем опыт прекращается. Исходами такого опыта являются последовательности вида Г; РГ; РРГ; РРРГ;… Число выпадений «решки» непредсказуемо. Оно может быть любым числом, поэтому элементарных исходов в этом опыте бесконечное множество (теоретически, по крайней мере).

Если пространством элементарных исходов Ωконечно или счетно, его называют ***дискретным***.

Пятый опыт: стрельба по круглой мишени.

Результат стрельбы можно обработать по-разному: если нас интересует сам факт попадания в мишень, то исходов опыта будет два: «попадание в мишень» и «непопадание в мишень». И, следовательно, $\Omega=\{\omega_п,\omega_{нп}\}$.Т.е. пространство элементарных исходов дискретно.

Если на мишени выбрать декартову систему координат с началом в центре круга, то результат стрельбы однозначно характеризуется координатами точки попадания (x, y):

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \le r^2 \right\}.$$

Это пример ***непрерывного*** пространства элементарных исходов (наблюдаемыми результатами являются точки координатного пространства).

Как видим, для одного и того же эксперимента можно построить несколько пространств элементарных исходовΩ, по-разному характеризующих результат эксперимента. При решении практических задач нужно строить пространство элементарных исходов так, чтобы интересующие нас события принадлежали этому пространству.

Пример 37.3. Случайный эксперимент –подбрасывание двух игральных костей. Построить пространство элементарных исходов Ω и описать события: A = {на обеихкостях выпало число очков, кратное трем},
B = {сумма выпавших чисел не больше 12},
C = {выпали одинаковые числа},
G = {произведение выпавших чисел делится на пятнадцать}.

$\triangleleft$Элементарные исходы здесь – упорядоченные пары цифр, каждая из которых может принимать одно из шести значений, то есть $\Omega = \{(i, j) : i = \overline{1,6},\ j = \overline{1,6}\}$

Тогда указанные события совпадают со следующими подмножествами Ω:

$A = \{(3,3), (3,6), (6,3), (6,6)\}$,

$B = \{(i, j) : i = \overline{1,6},\ j = \overline{1,6}\}$,

$C = \{(i,i) : i = \overline{1,6}\}$,

$G = \{(3,5), (5,3), (6,5), (6,5)\}$. $\triangleright$

Случайные события и действия над ними

Определение 37.1. Если пространство элементарных исходов Ω конечно либо счетно, то ***событием*** называют произвольное подмножество Ω.

Элементарные исходы, которые являются элементами рассматриваемого подмножества, называют ***благоприятствующими*** этому событию или ***образующими это событие***.

Говорят, что событие A произошло, если в результате проведения опыта наступил исход $\omega \in A$.

Определение 37.2.

1. Событие, которое всегда происходит в рамках данного опыта (включающее все элементарные исходы, т.е. совпадающее сΩ)называется***достоверным***событием.

2. Событие, которое в рамках данного опыта никогда не происходит (не содержащее ни одного элементарного исхода) называется***невозможным*** событием.

Будем обозначать невозможное событие $\varnothing$, достоверное событие Ω.

Пример 37.4. В первом опыте событие G={выпадение хотя бы одного очка} – достоверное событие; событие T={выпадение дробного числа очков} – невозможное событие.

Над событиями, как над множествами, можно проводить различные операции.

Определение 37.3. ***Суммой (объединением) событий*** A и B называется событие $C = A + B$ $(C = A \cup B)$, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих или событию A, или событию B. В рамках данного опыта это означает, что событие $C = A + B$ происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B.

Определение 37.4. ***Произведением (пересечением) событий A и B*** называется событие $D = A \cdot B$ $(D = A \cap B)$, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих и событию A, и событию B. В рамках данного опыта $D = A \cdot B$ означает событие , при котором A и B наступают одновременно.

Определение 37.5. ***Разностью (дополнением) событий A и B*** называется событие $E = A \setminus B$, состоящее из исходов, благоприятствующих событию A, но при этом не благоприятствующих B. В рамках данного опыта событие $E = A \setminus B$ состоит в том, что произошло событие A, но при этом не произошло событие B.

Определение 37.6. ***Противоположным к событию*** A называется событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$, состоящее в том, что событие A в результате опыта не произойдет. $\overline{A}$ благоприятствуют элементарные исходы множества Ω, которые не благоприятствуют событию A.

Пример 37.5. В первом опыте
событие A={выпадение четного числа очков}, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$;
событие B={выпадение числа очков, кратного 3}, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$.

Тогда $C = A + B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} + \{\omega_3, \omega_6\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$,

$$D = A \cdot B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \cdot \{\omega_3, \omega_6\} = \{\omega_6\},$$

$$E = A \setminus B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \setminus \{\omega_3, \omega_6\} = \{\omega_2, \omega_4\},$$

$$\overline{A} = \overline{\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}, \ \overline{B} = \overline{\{\omega_3, \omega_6\}} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\},$$

$$\overline{A} \cdot A = \varnothing, \qquad \overline{A} + A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega.$$

Определение 37.7.

1. События A *и* B называются ***несовместными***, если они не имеют общих элементарных исходов, т.е. $A \cdot B = \varnothing$. В рамках данного опыта несовместные события не могут произойти одновременно.

2. События $A_1, A_2, ..., A_n$ называют ***попарно несовместными***, если для любых $i \neq j$, где $1 \le i, j \le n$, события A_i и A_j несовместны.

Пример 37.6. Так как $\overline{A} \cdot A = \varnothing$, то $\overline{A}$ и A – несовместные события.

Определение 37.8. Будем говорить, что в некотором опыте ***событие*** A ***влечет появление события*** B (обозначают $A \subset B$), если всегда, как только происходит событие A происходит и событие B, т.е. каждый исход, благоприятствующий A, одновременно входит и в множество B.

Пример 37.7. В первом опыте событие A ={выпадение четного числа очков}={ω_2, ω_4,ω_6} влечет событие B = {выпадение не менее двух очков}={ω_2, ω_3, ω_4,ω_5, ω_6}, $A \subset B$.

Определение 37.9. События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют ***полную группу событий***, если они попарно несовместны и $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$.

Пример 37.8. В первом опыте примером событий, образующих полную группу являются события A_i = {выпадение i очков на верхней грани кости}, $i = \overline{1,6}$.

Приведенные операции над событиями обладают следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$.
2. $A \cdot B = B \cdot A$.
3. $\overline{A} + A = \Omega$.
4. $\overline{A} \cdot A = \varnothing$.
5. $A \cdot \Omega = A$.
6. $\overline{\overline{A}} = A$.
8. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.
9. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Эти свойства непосредственно следуют из определения операций над событиями.

Замечание. Равенства 8-9 называются ***формулами де Моргана.***

Ранее мы определили событие как подмножество пространства элементарных исходов для случая конечного или счетного Ω. В случае несчетного множества элементарных исходов событиями называют не любые подмножества Ω, а только те, которые принадлежат некоторому классу F. Этот класс в теории множеств принято называть сигма-алгеброй событий (пишут σ-алгебра). С точки зрения здравого смысла событие — это то, что мы наблюдаем после проведения опыта. В частности, если можно после опыта установить, произошли или нет события A и B, то можно также сказать, произошли или нет события $\overline{A}$ и $\overline{B}$, объединение, пересечение и разность событий A и B. Таким образом, σ- алгебра событий обязана быть классом подмножеств, замкнутым относительно приведенных операций, т.е. указанные операции над элементами (подмножествами) данного класса приводят к элементам (подмножествам) того же класса.

Дадим теперь определение σ-алгебры событий.

Определение 37.10. Класс событий $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $\mathrm{A}_i \subset \Omega$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющий свойствам:

C_1: $\Omega \in \mathcal{F}$,

C_2**:** $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$,

C_3**:** $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \ \prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

называют $\sigma -$ ***алгеброй событий***.

Замечание 1. Класс событий с указанными свойствами достаточен для описания любого явления, возникающего в результате эксперимента.

Замечание 2. В случае конечного или счетного пространства элементарных исходов Ω в качестве σ-алгебры событий обычно рассматривают множество всех подмножеств Ω.