## Лекция 3. Алгебра векторов. Скалярное произведение

***Вектором*** называется направленный отрезок, т.е. отрезок, имеющий направление и длину. Если $A$ – начало вектора, $B$ – его конец (рис.3.1.), то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. Вектор $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ называется ***противоположным*** вектору $\overrightarrow{AB}$.

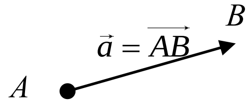


Рис.3.1.

***Модулем*** или ***длиной*** вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется ***нулевым*** и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной или на параллельных прямых (обозначают $\vec{a} \parallel \vec{b}$); нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Ненулевые коллинеарные векторы одинаково направленные называются ***сонаправленными*** и обозначают $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, противоположно направленные обозначают $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Векторы в пространстве называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными*** ($\vec{a} = \vec{b}$), если выполнены условия: 1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; 2) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Векторы с таким определением их равенства называют ***свободными***.

### Линейные операции над векторами

**Умножение вектора на скаляр**. Произведение вектора $\vec{a}$ на число (скаляр) $\lambda$ задает вектор $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{b}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\vec{a} \,||\, \vec{b}$;

2) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

3) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;

4) если $\lambda > 0 \Rightarrow \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ (рис.3.2).

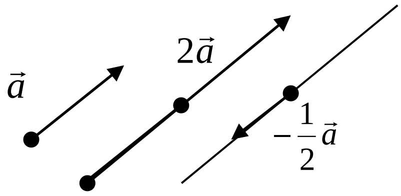


Рис.3.2

**Теорема 3.1** (необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов). Пусть $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует единственный скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$, при котором верно равенство: $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$, причем $|\lambda| = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

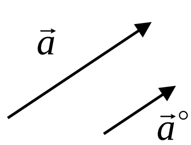


Рис.3.3

Вектор $\vec{a}^\circ$ – называется ***ортом*** вектора $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$, если этот вектор удовлетворяет условиям:

1) $\vec{a}^\circ \uparrow\uparrow \vec{a}$;   2) $|\vec{a}^\circ| = 1$   (рис.3.3.).

Из теоремы 3.1следует, что $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}^{\circ}$, где $\lambda=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}^{\circ}|}=|\vec{a}|$. Тогда получим, что любой вектор равен произведению его модуля на орт, т.е.

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^{\circ}\ . \tag{3.1}$$

**Сложение векторов.** ***Правило треугольника***: пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора (рис.3.4.). Возьмем произвольную точку $A$ и построим вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Из конца вектора $\vec{a}$ отложим вектор $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, тогда вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ : $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

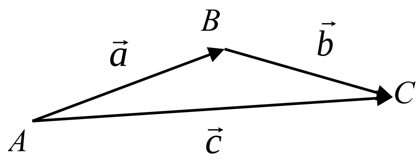

Рис.3.4.

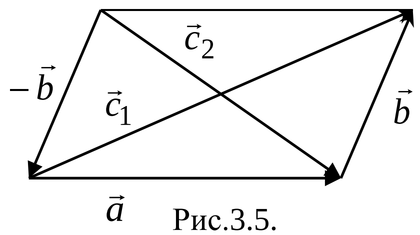

Рис.3.5.

**Разность векторов** определяется через сумму векторов: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

***Правило параллелограмма***: в параллелограмме (рис.3.5.) векторы – диагонали являются суммой или разностью векторов – сторон:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}_1;\quad \vec{a}-\vec{b}=\vec{c}_2.$$

Свойства линейных операций над векторами приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

**Свойства линейных операций**

| № | Название свойства | Умножение вектора на скаляр $\lambda,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ | Сложение векторов |
|---|---|---|---|
| 1 | Коммутативность | $\lambda\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\lambda$ | $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ |
| 2 | Ассоциативность | $\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\vec{a})=(\lambda_1\cdot\lambda_2)\cdot\vec{a}$ | $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ |
| 3 | Дистрибутивность | $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\vec{a}=\lambda_1\cdot\vec{a}+\lambda_2\cdot\vec{a}$ | $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$ |

Очевидно, что для любого вектора $\vec{a}$, противоположным ему вектором будет $(-\vec{a})=(-1)\cdot\vec{a}$ такой, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Для $\vec{0}$ вектора выполняется: $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$; $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$; $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

**Числовая ось. Геометрическое представление действительных чисел**

Прямая с фиксированной точкой $O$ и коллинеарным ей вектором $\vec{i}$ единичной длины называется числовой осью и обозначается $Ox$. Вектор $\vec{i}$, называемый ортом оси $Ox$, определяет направление оси, а его длина задает масштаб оси.

Рассмотрим любую точку $M \in Ox$ (рис.3.6.). Тогда, учитывая равенство (3.1), вектор $\overrightarrow{OM}$ представим в виде

$$\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{i}\,, \qquad (3.2)$$

где $x_M = \begin{cases} \left|\overrightarrow{OM}\right|, \textit{если точка } M \textit{ лежит правее точки } O, \\ -\left|\overrightarrow{OM}\right|, \textit{если точка } M \textit{ лежит левее точки } O. \end{cases}$

Таким образом, получено взаимнооднозначное соответствие (изоморфизм) между точками оси и действительными числами – координатами этих точек:

$$M \in Ox \leftrightarrow x_M \in \mathbb{R}.$$

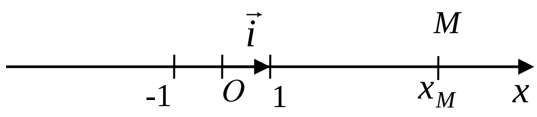

Рис.3.6.

При математическом моделировании изоморфные объекты отождествляются, поэтому действительные числа будем отождествлять с точками числовой оси.

## Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задан произвольный вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$.

Через концы вектора перпендикулярно оси $Ox$ проведем плоскости. Получим точки $A'$, $B'$ – проекции точек $A$, $B$ на ось $Ox$. (рис.3.7).

Число $x_2 - x_1$, равное разности координат проекции конца и проекции начала вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, называется ***проекцией вектора*** $\vec{a}$ ***на ось*** $Ox$ и обозначается $x_2 - x_1 = np_{Ox}\,\vec{a}$.

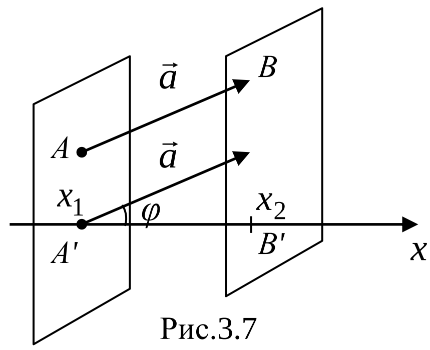

Рис.3.7

Очевидно, что

$$np_{Ox}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi, \qquad (3.3)$$

где угол $\varphi\ (0 \le \varphi \le \pi)$ – это угол между вектором $\vec{a}$ и осью $Ox$.

Из равенства (3.3) следует, что проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол – прямой.

## Свойства проекций

**Свойство 1**. Проекция суммы векторов равняется сумме их проекций, т.е. $np_{Ox}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_{Ox}\,\vec{a} + np_{Ox}\,\vec{b}$.

**Свойство 2**. $np_{Ox}\left(\lambda\vec{a}\right) = \lambda \cdot np_{Ox}\,\vec{a}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

## Разложение вектора по ортонормированному базису. Действия над векторами, заданными координатами

Рассмотрим в пространстве прямоугольную (декартовую) систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях $Ox$, $Oy$, $Oz$ единичные векторы (орты), которые соответственно обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Тройку взаимно перпендикулярных, единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}, \vec{k}$ назовем ***ортонормированным базисом*** векторов пространства.

Совместим начало произвольного вектора с началом координат, получим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки $M$ (рис.3.8).

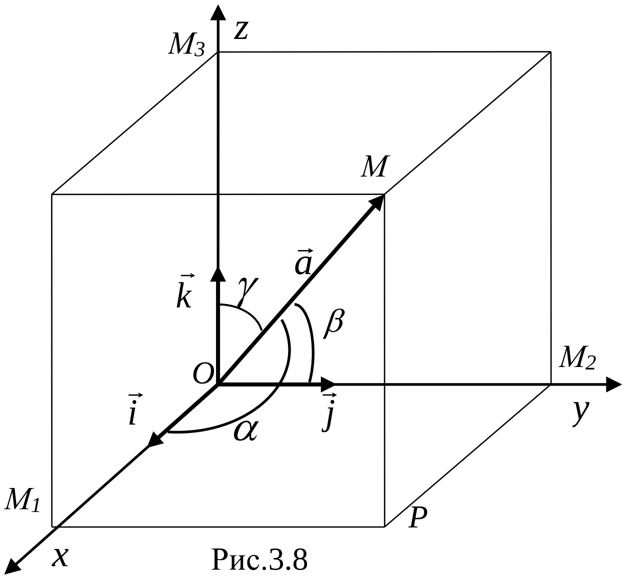

Рис.3.8

Через точку $M$ проведем три плоскости, перпендикулярные осям $Ox$, $Oy$, $Oz$ , вместе с координатными плоскостями получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overrightarrow{OM}$ .

Точки $M_1(x)$, $M_2(y)$, $M_3(z)$ – это проекции точки $M$ на координатные оси. Тогда с учетом равенства (3.2) получим

$$\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}; \quad \overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}; \quad \overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}. \tag{3.4}$$

Числа $x, y, z$ являются координатами точки $M(x; y; z)$, а также проекциями вектора $\vec{a}$ на соответствующие оси (см. равенство (3.3)):

$$x = np_{Ox}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha; \quad y = np_{Oy}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\beta; \quad z = np_{Oz}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\gamma. \tag{3.5}$$

По определению суммы векторов находим

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

С учетом формул (3.4) окончательно получаем **разложение вектора по ортонормированному базису**:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Это равенство записывают в символическом виде: $\vec{a} = (x; y; z)$, где числа $x$, $y$, $z$, называются **координатами вектора** $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , причем координаты вектора совпадают:

а) с его проекциями на соответствующие координатные оси (формулы (3.5));

б) с координатами точки $M$ – конца радиус-вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ .

Чтобы связать координаты с конкретным вектором, используют также обозначение $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

***Линейные операции над векторами в координатной форме.*** Пусть $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Тогда

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z), \ \forall\lambda \in \mathbb{R};$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x;\, a_y+b_y;\, a_z+b_z\right); \qquad \vec{a}-\vec{b}=\left(a_x-b_x;\, a_y-b_y;\, a_z-b_z\right).$$

***Равенство векторов.*** $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z$.

***Условие коллинеарности векторов*** . Пусть $\vec{b}\neq\vec{0}$.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \ \Leftrightarrow\ \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda, \qquad (3.6)$$

где $\lambda>0$, если $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$ и $\lambda<0$, если $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$.

***Координаты вектора***. Известны координаты точек $A(x_A;\, y_A;\, z_A)$, $B(x_B;\, y_B;\, z_B)$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности (рис.3.9): $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}==(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k})-(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k})=$
$=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}$.

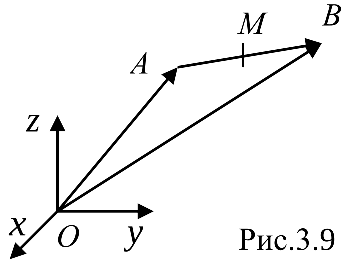

Рис.3.9

Следовательно, координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала:

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A\right).$$

***Модуль вектора.*** Если вектор задан своими координатами $\vec{a}=\left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$, то его модуль находится по формуле:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ .$$

***Координаты середины отрезка.*** Если точка $M\left(x_M;\, y_M;\, z_M\right)$ – середина отрезка $AB$ (рис.3.9), то

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2};\quad z_M=\frac{z_A+z_B}{2}\ .$$

***Скалярным произведением*** ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ) называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ – угол между векторами (рис. 3.10), по определению всегда $0\le\varphi\le\pi$. Для нулевого вектора: $\vec{a}\cdot\vec{0}=0$.

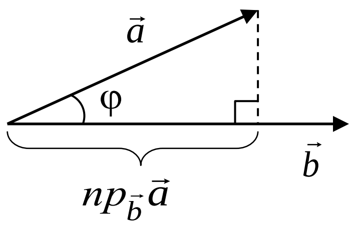

Рис.3.10.

Учитывая формулу (3.3), получим выражение скалярного произведения через проекции векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}\ .$$

**Свойства скалярного произведения**

$1^0$. **Коммутативность**: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

$2^0$. Л**инейность скалярного произведения**, например, по первому сомножителю ($\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{R}$): $(\lambda_1\cdot\vec{a}_1+\lambda_2\cdot\vec{a}_2)\cdot\vec{b}=\lambda_1(\vec{a}_1\cdot\vec{b})+\lambda_2(\vec{a}_2\cdot\vec{b})$.

3[0]. **Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$:
$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, так как $cos\varphi = cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

4[0]. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$, так как $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{a}}) = \cos 0 = 1$.

**Вычисление скалярного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе**

Пусть в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ заданы векторы $\vec{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ и $\vec{b} = \left(b_x; b_y; b_z\right)$. Используя свойства скалярного произведения и, так как
$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1 \Rightarrow \vec{i}^{\,2} = \left|\vec{i}\right|^2 = 1 = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2}$; $\vec{i} \perp \vec{j}$; $\vec{j} \perp \vec{k}$; $\vec{k} \perp \vec{i}$
$\Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i}$, получим

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \cdot \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right) =$$
$$= a_x b_x \left(\vec{i}^{\,2}\right) + a_x b_y \left(\vec{i} \cdot \vec{j}\right) + a_x b_z \left(\vec{i} \cdot \vec{k}\right) + a_y b_x \left(\vec{j} \cdot \vec{i}\right) + a_y b_y \left(\vec{j}^{\,2}\right) + a_y b_z \left(\vec{j} \cdot \vec{k}\right) +$$
$$+ a_z b_x \left(\vec{k} \cdot \vec{i}\right) + a_z b_y \left(\vec{k} \cdot \vec{j}\right) + a_z b_z \left(\vec{k}^{\,2}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$ Итак,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (3.7)$$

Из свойства 4[0] скалярного произведения можно получить уже известную формулу для нахождения модуля вектора $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

**Угол между векторами**. **Направляющие косинусы вектора**. Используя определение и выражение скалярного произведения (3.7) через координаты векторов, можно найти косинус угла между векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \cdot \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}. \qquad (3.8)$$

Пусть $\alpha, \beta, \gamma$ – углы, которые образует вектор $\vec{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ соответственно с осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$ (рис.3.11). Косинусы этих углов называются ***направляющими косинусами вектора*** и их можно найти из формулы (3.5), а также из (3.8), выбирая в качестве вектора $\vec{b}$ орты координатных осей:

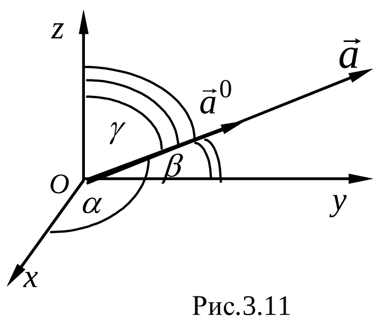


Рис.3.11

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}. \qquad (3.9)$$

Вспомним, что орт вектора находится по формуле (3.1). Тогда

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right) = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right).$$

Сравнивая координаты орта с равенствами (3.9), получим, что направляющие косинусы являются координатами орта:

$$\vec{a}^0 = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma).$$

Так как $\left|\vec{a}^\circ\right| = 1$, то получим свойство: сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, т.е.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (3.10)$$

***Механический смысл скалярного произведения***. Работа $A$ постоянной силы $\vec{F}$ при прямолинейном перемещении $\vec{s}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{s}. \qquad (3.11)$$

### *Некоторые типовые примеры*

**Пример 1.** Найти координаты вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = (0; -1; 1)$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

⊲ Вектор $\vec{b}$ имеет координаты: $\vec{b} = (1; 1; -3)$. По формулам линейных операций над векторами найдем $3\vec{a} = 3\cdot(0; -1; 1) = (0; -3; 3)$, тогда

$\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b} = (0; -3; 3) - (1; 1; -3) = (0-1; -3-1; 3-(-3)) = (-1; -4; 6)$. ⊳

**Пример 2.** Даны векторы $\bar{a} = (m-1; -3; 1)$ и $\bar{b} = (-2; 3; -1)$. При каком значении "$m$" векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны?

⊲ Из условия коллинеарности векторов (3.6) следует: $\frac{m-1}{-2} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \frac{m-1}{-2} = -1 \Rightarrow m-1 = 2,\ m = 3$. Так как $\lambda = -1 < 0$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ противоположно направленные. ⊳

**Пример 3.** Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = \sqrt{8}\,\vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{b} = (1; -2; 0)$.

⊲ $\vec{a} = \left(\sqrt{8}; 0; 1\right)$, по формуле (3.8):

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\sqrt{8}\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 1\cdot 0}{\sqrt{\sqrt{8}^2 + 0^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{15}.\ ⊳$$

**Пример 4**. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если $\alpha = (\vec{a}\,\hat{,}\,Ox) = 45°$, $\beta = (\vec{a}\,\hat{,}\,Oy) = 60°$, $|\vec{a}| = 4$, $\gamma = (\vec{a}\,\hat{,}\,Oz)$ - тупой.

◁ Из формулы (3.10) получим

$cos^2\gamma = 1 - cos^2\alpha - cos^2\beta = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Откуда находим $cos\gamma = -\frac{1}{2}, \Rightarrow \gamma = 120^\circ$. Из формулы (3.1) следует, что

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0 = 4 \cdot \left(\cos 45^0; \cos 60^0; \cos 120^0\right) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Итак, $\vec{a} = \left(2\sqrt{2};\ 2; -2\right)$. ▷

**Пример 5.** Найти работу силы $\vec{F} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(2; 1; 0)$ в положение $B(0; 2; 3)$.

◁ Сначала получим координаты вектора перемещения: $\vec{s} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (0-2;\ 2-1;\ 3-0) = (-2; 1; 3)$. Искомую работу найдем по формуле (3.11): $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 3 = -6 - 1 + 12 = 5$. ▷