Лекция 3. Алгебра векторов. Скалярное произведение

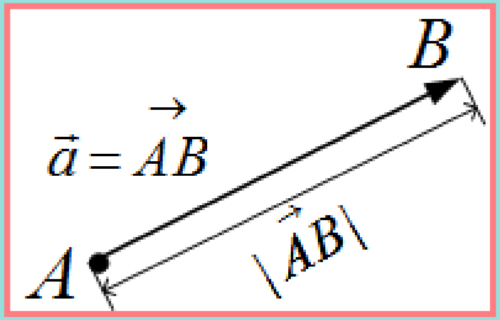
ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

СКАЛЯРНЫЕ	ВЕКТОРНЫЕ
Определяются только ***числовым значением*** (площадь S, длина L, объем V, работа A, масса M)	Определяются ***числовым значением*** и ***направлением*** (сила F, скорость v, ускорение a)

Вектор – это направленный отрезок. Если A - начало вектора, а B - его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ (или $\vec{a}$).

Модулем (длиной) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ (или $\left|\vec{a}\right|$)

Нулевым вектором называется вектор, длина которого равна нулю.

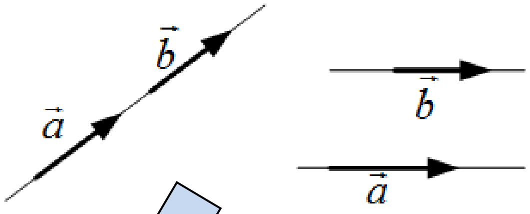


ВИДЫ ВЕКТОРОВ

КОЛЛИНЕАРНЫЕ

$(\vec{a} \parallel \vec{b})$

векторы, лежащие на одной или на параллельных прямых

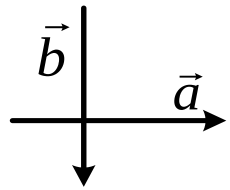


ОРТОГОНАЛЬНЫЕ

(ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ)

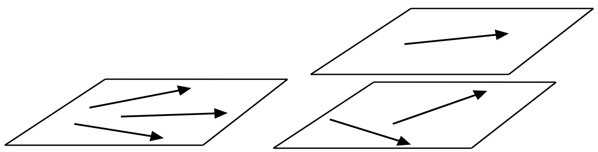
$(\vec{a} \perp \vec{b})$

векторы, лежащие под прямым углом друг к другу



КОМПЛАНАРНЫЕ

Векторы в пространстве, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях



СОНАПРАВЛЕННЫЕ $(\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b})$

ненулевые одинаково направленные векторы

ПРОТИВОПОЛОЖНО НАПРАВЛЕННЫЕ

$(\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b})$ ненулевые противоположно направленные векторы

РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

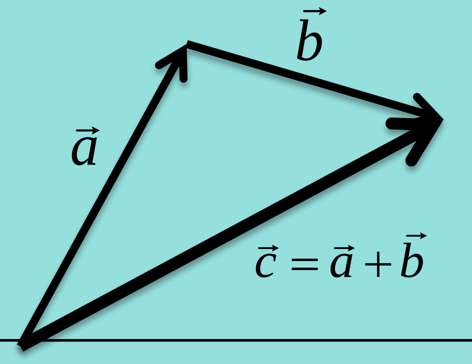
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **равны** друг другу, если они сонаправленные $(\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b})$ и их длины равны $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

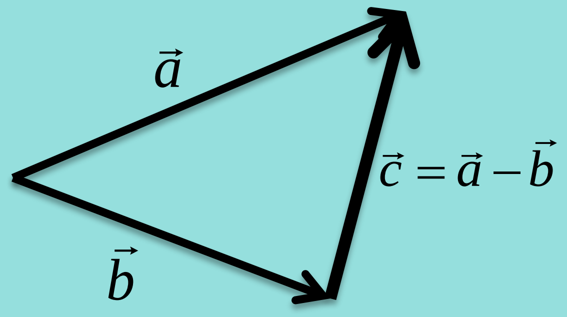
Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку плоскости или пространства

Линейные операции над векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

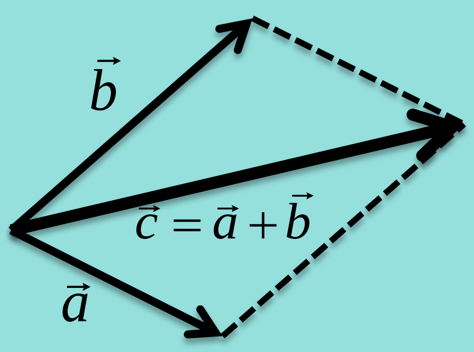
Сложение	***Вычитание***	***Умножение на число***

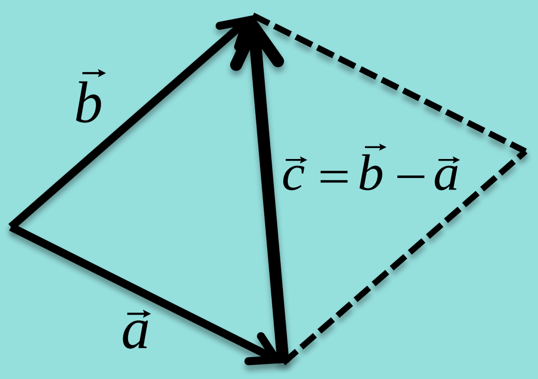
По правилу треугольника

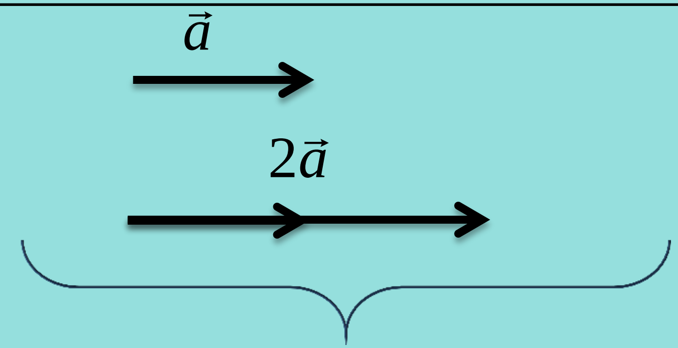




По правилу параллелограмма







Теорема (необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов). Пусть $\vec{b}\neq 0$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует единственный скаляр $\lambda\in\mathbb{R}$, при котором верно равенство:

$$\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}\text{ , причем } |\lambda|=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

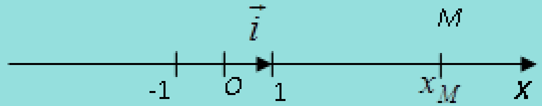
Свойства линейных операций

$$\lambda\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\lambda \qquad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\vec{a})=(\lambda_1\cdot\lambda_2)\cdot\vec{a} \qquad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\vec{a}=\lambda_1\cdot\vec{a}+\lambda_2\cdot\vec{a} \qquad \lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$$

Числовая ось. Геометрическое представление действительных чисел

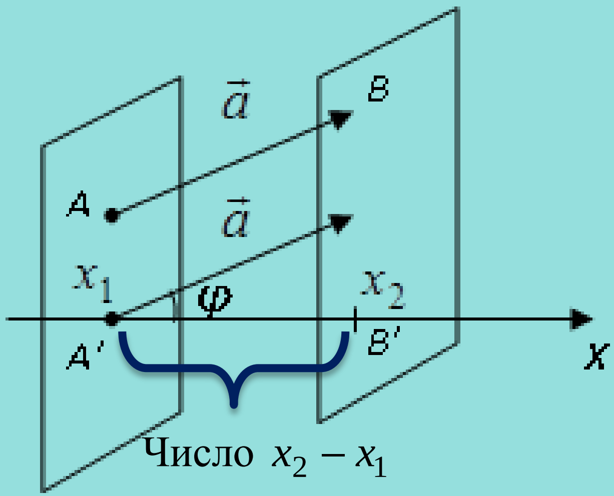


Вектор $\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{i}$, где $x_M = \begin{cases} \left|\overrightarrow{OM}\right|, \textit{если точка } M \textit{ лежит правее точки } O, \\ -\left|\overrightarrow{OM}\right|, \textit{если точка } M \textit{ лежит левее точки } O. \end{cases}$

взаимнооднозначное соответствие (изоморфизм) между точками оси и действительными числами – координатами этих точек:

$M \in Ox \leftrightarrow x_M \in \mathbb{R}$

Проекция вектора на ось



Свойства проекций

$$np_{Ox}\left(\lambda\vec{a}\right) = \lambda \cdot np_{Ox}\,\vec{a}$$

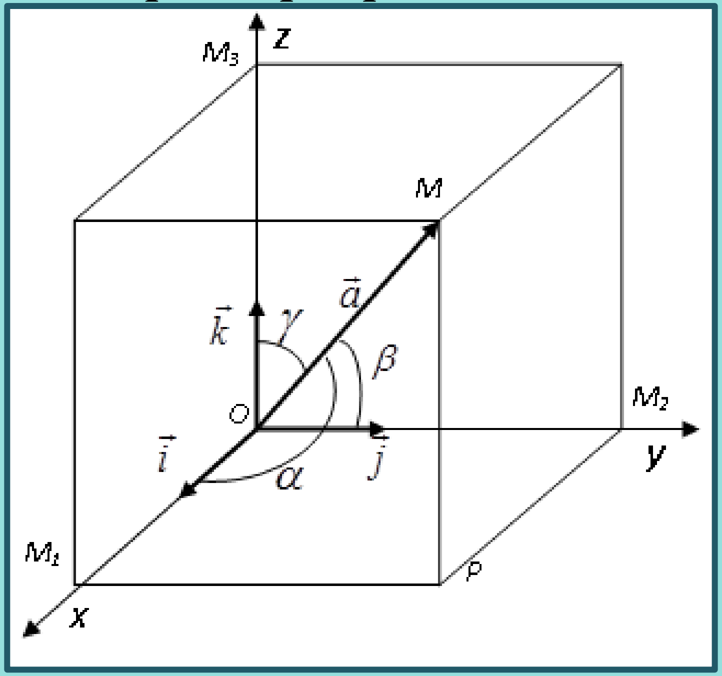
$$np_{Ox}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_{Ox}\,\vec{a} + np_{Ox}\,\vec{b}$$

$$np_{Ox}\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi,$$

где угол $\varphi\left(0 \le \varphi \le \pi\right)$ – это угол между вектором $\vec{a}$ и осью Ox.

Разложение вектора по ортонормированному базису

Тройку взаимно перпендикулярных, единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ назовем ***ортонормированным базисом*** векторов пространства



Любой вектор можно разложить по ортонормированному базису, т.е. представить в виде:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = (x; y; z),$$

где числа x, y, z, называются **координатами вектора** $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, причем координаты вектора совпадают:

а) с его проекциями на соответствующие координатные оси

$$\begin{cases} x = np_{Ox}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha \\ y = np_{Oy}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\beta \\ z = np_{Oz}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

б) с координатами точки M – конца радиус-вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$

Линейные операции над векторами в координатной форме

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \qquad \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z), \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$$

Равенство векторов $\vec{a}=(a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b}=(b_x; b_y; b_z)$

$$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z$$

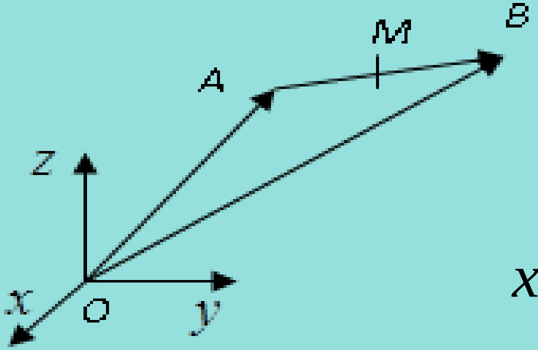
Условие коллинеарности векторов ($\vec{a}\parallel\vec{b}$ **, при** $\vec{b}\neq\vec{0}$**)**

Дано: $\vec{a}=(a_x; a_y; a_z)$ **и** $\vec{b}=(b_x; b_y; b_z)$

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda$$

$\lambda>0$	$\lambda<0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
векторы сонаправленные	*векторы противоположно направленные*

Координаты вектора. Известны координаты точек $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$.



$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A)$$

Координаты середины отрезка

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2};\quad z_M=\frac{z_A+z_B}{2}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\left(\textit{обозн.}\ \vec{a}\cdot\vec{b}, \vec{a}\vec{b}\right)$ –

это произведение их длин на косинус угла между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;

2) $(\lambda_1\cdot\vec{a}_1 + \lambda_2\cdot\vec{a}_2)\cdot\vec{b} = \lambda_1(\vec{a}_1\cdot\vec{b}) + \lambda_2(\vec{a}_2\cdot\vec{b})$;

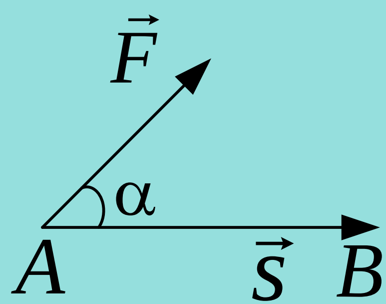
3) Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$;

4) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

Механический смысл скалярного произведения:

Работа силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки из её исходного положения A в положение B вычисляется с помощью скалярного произведения по формуле:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{s} = |\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{s}) = |\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos\alpha$$



Скалярное произведение векторов в ***координатной форме***:

$$\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right),\ \vec{b}\left(b_x;b_y;b_z\right) \Rightarrow \ \vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

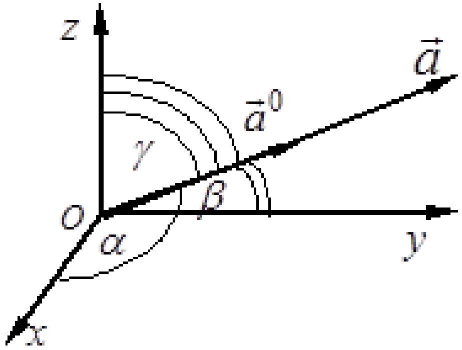
ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

1. *Проверка ортогональности векторов*: $\vec{a}\perp\vec{b} \ \Leftrightarrow \ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

2. Вычисление угла между векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}$$

3. *Направляющие косинусы вектора*



$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$\vec{a}^0 = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ - *орт вектора* $\vec{a}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

4. *Нахождение проекции вектора на вектор*

$$np_{\vec{b}}\ \vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$