Лекция 2. Системы линейных алгебраических уравнений

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + ... + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + ... + a_{2n}\cdot x_n = b_2, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + ... + a_{mn}\cdot x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

где числа $a_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ называются **коэффициентами системы**, b_i – **свободными членами**.

Напомним основные понятия, связанные с такими системами.

Если $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, то система (2.1) называется **однородной**.

Решением системы называется такой набор значений $x_1, x_2, ..., x_n$, что при подстановке его в систему *каждое* уравнение превращается в верное равенство.

Две системы называются **равносильными**, если любое решение первой системы является решением второй и наоборот.

Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений.

Система называется **определенной**, если она имеет одно решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Матрицей системы (2.1) будем называть матрицу A, составленную из коэффициентов системы, а если к этой матрице справа присоединить столбец B свободных членов получим **расширенную матрицу** $(A|B)$ системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Методы решения СЛАУ

1. Метод Гаусса. Эффективен для систем с любым сочетанием числа уравнений и числа неизвестных. Суть метода состоит в последовательном исключении неизвестных с целью получения ступенчатой системы. Делают это с помощью элементарных преобразований уравнений системы, т.е. перестановки уравнений, умножением обеих частей уравнения на ненулевое число, прибавлением к обеим частям уравнения соответствующих частей любого другого. Очевидно, что получающиеся таким образом системы будут равносильными.

Если каждый раз не переписывать обозначения неизвестных, то эти операции с уравнениями будут соответствовать элементарным преобразованиям над строками расширенной матрицы системы. Столбцы (кроме столбца свободных членов) допускается только переставлять, но при этом нужно таким же образом переставить неизвестные.

Рассмотрим последовательность действий на следующем примере.

Пример 1. Найти решение системы методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2\cdot x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + \qquad\quad x_4 = 4. \end{cases}$$

$\lhd$ Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду.

1-й шаг: получение в первом столбце нулей ниже диагонального элемента $a_{11} = 1 \neq 0$. Для этого первую строку прибавим ко второй и вычтем из третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} c_2' = c_2 + c_1 \\ c_3' = c_3 - c_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim$$

2-й шаг: получение во втором столбце нулей ниже диагонального элемента при условии $a_{22} \neq 0$, а у нас $a_{22} = 0$, поэтому нужно поменять местами вторую строку с другой $i-$ой ($i > 2$) строкой или второй столбец с $j-$ым ($j > 2$) столбцом. В данном случае перестановка строк не поможет. Переставим столбцы, лучше переставить второй и четвертый столбец, чем второй и третий, т.к. сразу завершится 2-й шаг:

$$\sim \begin{array}{c} \kappa'_2 = \kappa_4 \\ \kappa'_4 = \kappa_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & b \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} c_2' = -c_2 \\ c_3' = -0{,}5c_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & b \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Получена ступенчатая расширенная матрица ранга $r = 3$. Первые три неизвестные x_1, x_4, x_3 - соответствующие ненулевым диагональным элементам назовем **базисными**, остальные $(x_2)-$**свободными**. Свободные неизвестные могут принимать произвольные значения $(x_2 = t \in \mathbb{R})$, а базисные – выражаются через свободные, т.е. наличие свободных неизвестных $(r < n)$ означает бесконечное множество решений системы.

Перепишем расширенную матрицу в виде ступенчатой системы и будем разрешать уравнения начиная с последнего:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 2\cdot x_3 - x_2 = 0, \\ \qquad x_4 - \quad x_3 \qquad = -1, \\ \qquad\qquad x_3 \qquad = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 - 2x_3 = x_2 - 5, \\ \quad x_4 = x_3 - 1 = 1, \\ \qquad x_3 = 2. \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = t-5,\ x_2 = t,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1,\ t \in \mathbb{R}$, т.е. система неопределенная. $\vartriangleright$

Метод Гаусса позволяет найти решение СЛАУ любой размерности, при этом для множества решений СЛАУ справедливы утверждения.

Утверждение 2.1 Если в процессе элементарных преобразований $(A\,|\,B) \sim (A'|\,B')$ у матрицы коэффициентов A' появится на $i-$ом месте нулевая строка, а $b_i^{'} \neq 0$ (что соответствует неверному равенству $0 = b_i^{'}$), то СЛАУ несовместная, то есть решение не существует.

Утверждение 2.2 Если система совместная, и расширенная матрица преобразуется к ступенчатому виду $\left(A\middle|B\right) \sim \left(A\middle|B\right) \sim S(r)\ \ (r \leq n)$, тогда:

а) если $r = n$ (треугольная система), то СЛАУ определенная, т.е. имеет единственное решение;

б) если $r < n$ (ступенчатая система), то СЛАУ неопределенная, т. е. имеет бесконечное множество решений.

2. Матричный метод. Формулы Крамера. Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Используя определение произведения матриц, систему (2.1) можно записать в **матричном виде** :

$$AX = B\ . \qquad (2.2)$$

Пусть матрица $A-$ невырожденная ($\Delta = |A| \neq 0$), умножим обе части равенства (2.2) слева на A^{-1}:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B\,.$$

Итак, получили формулу для нахождения матрицы-столбца неизвестных:

$$X = A^{-1}B. \qquad (2.3)$$

Отыскание решения системы по формуле (2.3) называют матричным способом решения системы. Равенство (2.3) можно записать в другом виде: $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta},\quad x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots .\, x_n = \dfrac{\Delta x_n}{\Delta}$, где определитель Δx_i получается из определителя матрицы системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ путем замены $i-$того столбца на столбец свободных членов. Формулы $x_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n}$ называются **формулами Крамера.**

Итак, *система* n *уравнений с* n *неизвестными в случае невырожденной матрицы системы имеет единственное решение*, которое может быть найдено матричным способом или по формулам Крамера. Такие системы методом Гаусса приводятся к равносильным системам треугольного вида: $r = n$ (утверждение 2.2а).

Пример 2. Найти решение системы: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2\cdot x_1 - x_2 + 3\cdot x_3 = 7, \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

1) методом Гаусса; 2) матричным методом.

◁ 1. Запишем расширенную матрицу системы: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$.

Считая ведущим элементом $a_{11} = 1 \neq 0$, с помощью элементарных преобразований получим ниже него в первом столбце нули. Для этого отнимем от второй строки первую, умноженную на 2, а от третьей строки – первую, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2-1\cdot 2 & -1-1\cdot 2 & 3-(-1)\cdot 2 & 7-0\cdot 2 \\ 3-1\cdot 3 & 2-1\cdot 3 & 1-(-1)\cdot 3 & 7-0\cdot 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim$$

Для того, чтобы на месте следующего ведущего элемента a_{22} получить единицу, поменяем местами вторую и третью строки, а затем элементы новой второй строки умножим на –1:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim$$

Далее применим **модифицированный метод Гаусса-Жордана**. Будем получать нули не только ниже, но и выше диагональных элементов.

Для того, чтобы получить нули ниже и выше ведущего элемента $a_{22} = 1$, отнимем от первой строки вторую, а к третьей прибавим вторую, умноженную на 3:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1-0 & 1-1 & -1-(-4) & 0-(-7) \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -3+1\cdot 3 & 5+(-4)\cdot 3 & 7+(-7)\cdot 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right) \sim$$

Умножив третью строку на $-{}^{1}\!/_{7}$, получим третий ведущий элемент $a_{33}=1$, выше которого получим 0. Для этого отнимем от первой строки третью, умноженную на 3, а ко второй прибавим третью, умноженную на 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что $x_1=1, \quad x_2=1, \quad x_3=2.$

2. Запишем данную систему в матричном виде $AX=B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-7, \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=7, \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3, \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=4, \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2, \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5, \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3.$$

Так как $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=1\cdot(-7)+1\cdot 7+(-1)\cdot 7=-7\neq 0$, то матрица A имеет обратную $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$: $\quad A^{-1}=\dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix} -7 & -3 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

По формуле (2.3) получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -7 & -3 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -7 & -3 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Откуда $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=2.$ $\rhd$

Пример 3. Решить систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=2, \\ 6x_1-8x_2=1. \end{cases}$$

$\triangleleft$ Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -12$, $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -14$,

$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -9$, то $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-14}{-12} = \frac{7}{6}$, $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-9}{-12} = \frac{3}{4}$. $\triangleright$

Однородные системы линейных алгебраических уравнений

Однородные СЛАУ всегда совместны, так как у любой однородной СЛАУ есть тривиальное (нулевое) решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

На практике интерес представляют ненулевые решения, а это означает, что однородная СЛАУ должна иметь бесконечное множество решений. Согласно утверждению 2.2б, тогда должно выполняться условие $rangA = rang(A|B) = r < n$.

Утверждение 2.3 Чтобы однородная СЛАУ имела нетривиальное решение достаточно, чтобы число уравнений было меньше числа неизвестных $(m < n)$.

Утверждение 2.4 Чтобы однородная СЛАУ $(n \times n)$ имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы коэффициентов равнялся нулю ($|A| = 0$).