Лекция 1. Элементы теории матриц и определителей

Числовой матрицей A размера $m \times n$ называется таблица из m строк и n столбцов вида

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n}; \end{matrix}$$

где a_{ij} − число, стоящее на пересечении i-ой строки и j-го столбца, называемое **элементом матрицы**.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов $m=n$, называется **квадратной матрицей порядка n** . Элементы с одинаковыми индексами a_{ii} образуют **главную диагональ** матрицы.

Две матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ одинакового размера называются **равными** $A = B$, если равны их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Матрица, целиком состоящая из нулей, называется **нулевой матрицей** и обозначается 0. Квадратная матрица E, у которой каждый элемент на главной диагонали равен единице, а остальные элементы равны нулю, называется **единичной матрицей:**

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \left(\delta_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями матриц называются:

1) перестановка любых двух строк (столбцов);
2) умножение всех элементов любой строки (столбца) на ненулевое число;
3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на произвольное число.

Матрицы, получающиеся после элементарных преобразований, называются **эквивалентными** и это обозначается $A \sim B$.

Матрица $S(r)$ размера $m \times n$ называется **ступенчатой ранга r** $\left(r \le \min(m,n)\right)$, если в ее первых r строках на главной диагонали стоят ненулевые элементы, а все элементы, стоящие в этих строках левее, а так же все элементы строк с номерами больше r, равняются нулю.

В случае, когда $m = n = r$ ступенчатая матрица называется **треугольной**.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к ступенчатому (треугольному) виду:

1-й шаг $(A \sim A')$. При $a_{11} \neq 0$ получение нулей в первом столбце ниже диагонального;

2-й шаг $(A' \sim A'')$. При $a_{22} \neq 0$ получение нулей во втором столбце ниже диагонального и так далее.

Пример 1. Приведение матрицы A к ступенчатому виду $S(r)$:

$$\triangleleft\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \underset{C_3' = C_3 - C_1}{\overset{C_2' = C_2 + C_1}{\sim}} A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{C_3'' = C_3' - C_2'}{\sim} A'' .$$

$$A'' = S(r) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{ступенчатая матрица ранга } r = 2;$$

Выражение $C_2' = C_2 + C_1$ означает, что элементы 2-ой строки (C_2') матрицы A' получаются путем прибавления к элементам второй строки (C_2) соответствующих элементов первой строки (C_1) матрицы A;

аналогично, выражение $C_3' = C_3 - C_1$ означает, что от элементов третьей строки отнимаются соответствующие элементы первой строки матрицы A; $C_3'' = C_3' - C_2'$ означает, что от элементов третьей строки отнимаются соответствующие элементы второй строки матрицы A'. $\triangleright$

Если из элементов строк (столбцов) матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ в том же порядке образовать столбцы (строки), то получим матрицу $A^T = (a_{ji})$ размера $n \times m$, которая называется **транспонированной** к данной.

Пример 2. Нахождение транспонированной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определители

Каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие некоторое число $\Delta = |A| = \det A$, называемое **определителем** и вычисляемое по определенному правилу:

n=1 $\quad \Delta = |a_{11}| = a_{11};$

n=2 $\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21};$

$$n=3 \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{32}\cdot a_{21} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}.$$

В общем случае применяется правило называемое **разложением определителя** по любой строке (столбцу), например, по i-ой строке:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + ... + a_{in}\cdot A_{in},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ – **алгебраическое дополнение** элемента a_{ij}, а M_{ij} – **минор элемента** a_{ij}, т.е. – определитель, полученный из исходного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Свойства определителей

1^0. Определитель **не изменится**, если а) прибавить к элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на произвольное число; б) при транспонировании.

2^0. При перестановке двух строк (столбцов) определитель изменит знак.

3^0. Определитель равен нулю, если он содержит: а) нулевую строку (столбец); б) две совпадающие или пропорциональные строки (столбцы); в) строку (столбец), являющуюся линейной комбинацией других строк (столбцов).

4^0. **Правило разложения**. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их собственные алгебраические дополнения. Если же алгебраические дополнения взять для элементов другой строки (столбца), то такая сумма будет равна нулю:

$$a_{i1}\cdot A_{j1} + a_{i2}\cdot A_{j2} + ... + a_{in}\cdot A_{jn} = \det A\cdot\delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, если\ i = j; \\ 0, если\ i \neq j; \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n};$$

5^0. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов. В частности, для единичной матрицы $|E| = 1$.

Пример 3. Вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки:

$\triangleleft$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Далее, вычислим четыре определителя третьего порядка. Первый имеет треугольный вид и по свойству 5^0 он равен 2 (произведение диагональных элементов). Последний определитель имеет строку нулей и по свойству определителей 3^0 равен нулю. Остальные определители найдем, разлагая их по элементам третьей строки:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2; \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Итак, $\det A = 1\cdot1\cdot2 + 2\cdot(-1)\cdot2 + 3\cdot1\cdot1 + 4\cdot(-1)\cdot0 = 1.$ $\triangleright$

Алгебра матриц

Суммой матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C=(c_{ij})=A+B$ того же размера такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij};\ \forall i, j$.

Пример 4. $\triangleleft\ A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$ $\triangleright$

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ **на число** $\lambda\in\mathbb{R}$, называется матрица $C=(c_{ij})=\lambda A$ того же размера, что и A такая, что $c_{ij}=\lambda a_{ij};\ \forall i, j.$

Пример 5. $\triangleleft\ 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot1 & 5\cdot2 \\ 5\cdot3 & 5\cdot4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}.$ $\triangleright$

Свойства линейных операций

1°. Коммутативность: $A+B=B+A;\ \ \lambda A=A\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}$.

2°. Ассоциативность: $A+(B+C)=(A+B)+C;\ \ \lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A;\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$

3°. Дистрибутивность: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B;\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Очевидно, что $A+0=0+A=A$, где 0 – нуль-матрица.

Умножение матриц. Произведение двух матриц A и B может быть найдено только в том случае, если число столбцов первой матрицы A равно числу строк второй матрицы B. **Произведением матрицы** A размера $m\times n$ на матрицу B размера $n\times p$ называется такая матрица $C=(c_{ij})=AB$ размера $m\times p$, что ее элемент, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца равен сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки первой матрицы и j-го столбца второй:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}\,; \qquad i=\overline{1,m} \qquad j=\overline{1,p}\,.$$

Пример 6.

$$\triangleleft\ AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot2&1\cdot1+2\cdot3\\3\cdot5+4\cdot2&3\cdot1+4\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&7\\23&15\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}5&1\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&14\\11&16\end{pmatrix}.$$

$$CD=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+1\cdot1\\2\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}.\ \triangleright$$

Из примера следует, что $AB\neq BA$.

Свойства операции умножения матриц

1°. $A(BC)=(AB)C$. 2°. $A(B+C)=AB+AC$ и $(A+B)C=AC+BC.$

3°. $AE=EA=A.$ 4°. $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB),\quad \lambda\in\mathbb{R}$.

5°. Для квадратных матриц определитель произведения равен произведению определителей: $|AB|=|A||B|$.

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется **невырожденной,** если определитель $\Delta=|A|\neq 0.$

Матрицей **обратной** для квадратной матрицы A называется матрица A^{-1}, удовлетворяющая условию $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.1 (о единственности обратной матрицы). Если для данной квадратной матрицы существует обратная матрица, то она единственная.

Теорема 1.2 (существования обратной матрицы). Для того, чтобы квадратная матрица A порядка n имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной. Если $|A|\neq 0$, то обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}, \tag{1.1}$$

где $A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ – присоединенная матрица, состоящая из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы A^{T}.

Пример 7. Найти матрицу обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\triangleleft$Так как $\det A = 1 \neq 0$, то по теореме 1.2 обратная матрица A^{-1} существует и для ее нахождения вычислим алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-2; A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$A_{21}=0;\quad A_{22}=1;\quad A_{23}=0;\ A_{31}=-2;\quad A_{32}=4;\quad A_{33}=1;$$

Тогда по формуле (1.1) получим

$$A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно сделать проверку и убедиться, что $A\cdot A^{-1}=E$. $\triangleright$

Замечание. Приведем более простой и эффективный способ нахождения обратной матрицы, особенно актуальный для матриц большой размерности. Обратную матрицу A^{-1} можно найти с помощью элементарных (п.1) преобразований: для этого припишем к матрице A справа единичную матрицу E, получим расширенную матрицу $(A|E)$, затем последовательно будем выполнять элементарные преобразования над A так, чтобы превратить ее в единичную, а рядом будем производить точно такие же операции с единичной матрицей. Когда A превратится в единичную, единичная превратится в обратную.

Пример 8. Найти с помощью элементарных преобразований обратную матрицу для матрицы A из предыдущего примера.

$$\triangleleft\,(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim c_2-2\cdot c_1\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\begin{array}{c} c_1-2\cdot c_3 \\ \sim c_2+4\cdot c_3\sim \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\triangleright$$