Лекция 1. Элементы теории матриц и определителей

Числовой матрицей размера называется таблица из m строк и n столбцов вида

$$A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}; \end{matrix}$$

где a_{ij} –число, стоящее на пересечении i-ой строки и j-го столбца, называемое **элементом матрицы**.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов $m=n$, называется **квадратной матрицей порядка *n* .**

Элементы с одинаковыми индексами a_{ii} образуют **главную диагональ** матрицы.

Две матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ одинакового размера называются **равными** $A=B$ если равны их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Матрицы вида $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, называется ***нулевой матрицей;***

$E=\left(\delta_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. ***- единичной матрицей***

Элементарными преобразованиями матриц называются:
- 1) перестановка любых двух строк (столбцов);
- 2) умножение всех элементов любой строки (столбца) на ненулевое число;
- 3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на произвольное число.

Матрицы, получающиеся после элементарных преобразований, называются **эквивалентными** и это обозначается $A \sim B$.

Матрица $S(r)$ размера $m \times n$ называется **ступенчатой ранга *r*** $\left(r \le \min(m,n)\right)$, если в ее первых r строках на главной диагонали стоят ненулевые элементы, а все элементы, стоящие в этих строках левее, а так же все элементы строк с номерами больше r , равняются нулю. В случае, когда $m = n = r$ ступенчатая матрица называется **треугольной**.

Определители

Каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие некоторое число $\Delta = |A| = \det A$, называемое **определителем** и вычисляемое по определенному правилу:

***n*=1**	***n*=2**	***n*=3**
$\Delta = \lvert a_{11} \rvert = a_{11};$	$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21};$	$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21} - $ $- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$

В общем случае применяется правило называемое **разложением определителя** по любой строке (столбцу), например, по *i*-ой строке:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} \ ,$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ – **алгебраическое дополнение** элемента a_{ij}, а M_{ij} – **минор элемента** a_{ij} , т.е. – определитель, полученный из исходного вычеркиванием *i*-ой строки и *j*-го столбца.

Свойства определителей

•1 . Определитель **не изменится**, если а) прибавить к элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на произвольное число; б) при транспонировании.

•2 . При перестановке двух строк (столбцов) определитель изменит знак.

•3 . Определитель равен нулю, если он содержит: а) нулевую строку (столбец); б) две совпадающие или пропорциональные строки (столбцы); в) строку (столбец), являющуюся линейной комбинацией других строк (столбцов).

•4 . **Правило разложения**. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их собственные алгебраические дополнения. Если же алгебраические дополнения взять для элементов другой строки (столбца), то такая сумма будет равна нулю:

$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{jn} = \det A \cdot \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, если\, i = j; \\ 0, если\, i \neq j; \end{cases}$ $\qquad i, j = \overline{1, n};$

•5 . Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов. В частности, для единичной матрицы $|E| = 1$.

Алгебра матриц

Операции над матрицами	
Сумма	***Произведение на число***
Суммой матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C=(c_{ij})=A+B$ того же размера такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij};\ \forall i,j$	**Произведением матрицы** $A=(a_{ij})$ **на число** $\lambda\in\mathrm{R}$, называется матрица $C=(c_{ij})=\lambda A$ того же размера, что и A такая, что $c_{ij}=\lambda a_{ij};\ \forall i,j.$

Свойства линейных операций

1°. $A+B=B+A;\quad \lambda A=A\lambda;\ \lambda\in\mathbf{R}.$

2°. $A+(B+C)=(A+B)+C;\quad \lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A;\ \lambda,\mu\in\mathbf{R}.$

3°. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B;\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;\ \lambda,\mu\in\mathbf{R}.$

Очевидно, что $A+0=0+A=A$, где 0 – нуль-матрица.

Операции над матрицами

Умножение матриц	**Обратная матрица**
Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times p$ называется такая матрица $C = (c_{ij}) = AB$ размера $m \times p$ что ее элемент, стоящий на пересечении *i*-ой строки и *j*-го столбца равен сумме произведений соответствующих элементов *i*-ой строки первой матрицы и *j*-го столбца второй: $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$ $i = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, p}$	Квадратная матрица A называется **невырожденной,** если определитель $\Delta = \|A\| \neq 0$. Матрицей **обратной** для квадратной матрицы A называется матрица A^{-1}, удовлетворяющая условию $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Имеют место следующие теоремы. ***Теорема 1.1*** *(о единственности обратной матрицы). Если для данной квадратной матрицы существует обратная матрица, то она единственная.* ***Теорема 1.2*** *(существования обратной матрицы). Для того, чтобы квадратная матрица* A *порядка* n *имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной. Если* $\|A\| \neq 0$*, то обратная матрица находится по формуле:* $A^{-1} = \frac{1}{\|A\|} A^*$, где $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ – присоединенная матрица, состоящая из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы A^T.
Свойства операции умножения матриц 1°. $A(BC) = (AB)C$ 2°. $A(B+C) = AB + AC$ и $(A+B)C = AC + BC$. 3°. $AE = EA = A$. 4°. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB), \quad \lambda \in \mathbb{R}$. 5°. Для квадратных матриц определитель произведения равен произведению определителей: $\|AB\| = \|A\|\|B\|$.	