Проверка гипотезы о нормальном распределении

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α=0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема *n*=200:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

2. По результатам измерений составлен интервальный статистический ряд

Интер-валы	66-70,2	70,2-74,4	74,4-78,6	78,6-82,8	82,8-87	87-91,2	91,2-95,4	95,4-99,6	99,6-103,8
Частоты	2	6	12	12	27	18	15	7	1

и найдены выборочная средняя $\overline{x}_B = 85{,}362$ и выборочное среднее отклонение $\sigma_B = 7{,}296$. Оценить с помощью критерия χ^2 Пирсона гипотезу о согласии выборочного распределения с законом нормального распределения при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Домашнее задание

3. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α=0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема *n*=200:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

4. По результатам измерений составлен интервальный статистический ряд

Интер-валы	46-50	50-54	54-58	58-62	62-66	66-70	70-74	74-78	78-82
Частоты	4	8	11	16	22	16	11	8	4

Оценить с помощью критерия χ^2 Пирсона гипотезу о согласии выборочного распределения с законом нормального распределения при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Дополнительные задачи для самостоятельной работы

5. Обследуются образцы бетона на прочность после пропарки. Данные обследования, кг/см^2, приведены ниже

185,2	149,6	159,0	187,2	182,8	194,7	196,4	132,6	170,9	186,2
193,7	207,4	163,2	130,1	115,6	147,9	133,3	147,9	155,6	148,6
147,9	161,6	170,1	207,4	153,5	158,0	154,7	127,5	185,2	170,0
162,4	214,2	183,6	201,4	153,9	185,2	170,9	159,8	135,2	150,5
182,8	168,5	146,2	164,1	147,1	146,2	206,1	142,0	118,2	146,2

158,1	147,4	126,7	165,8	203,2	185,0	178,5	170,0	175,1	151,3
130,1	156,4	194,7	159,2	130,1	169,1	168,0	180,2	191,1	163,2
130,8	153,0	141,1	207,4	155,6	136,9	164,1	176,7	179,4	174,3
157,3	154,7	185,2	156,4	176,0	219,3	186,2	179,4	190,4	161,5
127,4	134,3	192,1	211,7	195,5	161,4	144,5	173,4	176,8	141,1

Требуется: 1) найти статистический закон распределения случайной величины X − прочность бетона на сжатие; 2) построить гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения; 3) вычислить точечные оценки параметров распределения (выборочную среднюю, выборочную дисперсию); 4) оценить с помощью критерия χ^2 Пирсона гипотезу о согласии выборочного распределения с законом нормального распределения при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Типовой расчёт

В результате проверки недельного времени работы (в часах) электрических лампочек в аудиториях университета получена следующая выборка:

46	36	44	35	42	42	30	38	35	40
34	32	29	38	33	40	29	25	44	22
34	27	35	43	35	37	28	45	34	27
40	24	13	23	35	35	26	33	26	33
21	35	45	34	41	32	40	23	39	37
31	19	45	46	38	29	39	25	42	29
16	44	36	45	41	26	44	45	34	46
41	36	29	46	47	34	28	43	42	39
36	35	46	39	37	33	29	29	40	42
27	41	37	31	39	28	38	35	28	53

Оценить с помощью критерия χ^2 Пирсона гипотезу о согласии выборочного распределения с законом нормального распределения при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$

◁ В нашем случае $x_{наиб} = 53$, $x_{наим} = 13$, тогда размах варьирования $R = 53 - 13 = 40$.

Этот промежуток разбиваем на интервалы, количество которых r определяется по эмпирическим формулам: $r \approx \sqrt{n}$ или $r \approx 5\lg n$. Длина h каждого интервала находится из соотношения $h \approx \dfrac{R}{r}$. В нашем случае число интервалов $r \approx \sqrt{n} = \sqrt{100} = 10$ и шаг выборки $h = \dfrac{R}{r} = \dfrac{40}{10} = 4$. Получим интервальный статистический ряд:

Интервалы	13-17	17-21	21-25	25-29	29-33	33-37	37-41	41-45	45-49	49-53
m_i	2	1	5	12	12	23	18	15	11	1

Нулевая гипотеза H_0: теоретическая функция распределения вероятностей имеет вид (нормальное распределение):

$$F(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\overline{x}_B)^2}{2s^2}}dt.$$

Для того, чтобы воспользоваться критерием согласия Пирсона найдем

$$\overline{x}_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^*m_i=35{,}8;\ \ D_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^{*2}m_i-\overline{x}_B^2=57{,}6;$$

$s=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_B}=\sqrt{\frac{100}{99}\cdot 57{,}6}\approx 7{,}628$ (в качестве вариант x_i^* выбраны середины интервалов построенного статистического ряда).

Пусть p_i- вероятность попадания случайной величины X в $i-$тый интервал: $p_i=P\left(a_{i-1}<X<a_i\right)=\Phi\left(\frac{a_i-\overline{x}_B}{s}\right)-\Phi\left(\frac{a_{i-1}-\overline{x}_B}{s}\right)$, где

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа. Для того, чтобы воспользоваться таблицей функции Лапласа (приложение 2), сделаем замену $u_i=\frac{a_i-\overline{x}_B}{s}$ $=\frac{a_i-35{,}8}{7{,}628}$. Для вычисления теоретических частот np_i составим таблицу:

Концы интервалов a_i	$u_i=\frac{a_i-\overline{x}_B}{s}$	$\Phi(u_i)$	p_i	np_i
13	-2,99	-0,4986	0,0055	0,55
17	-2,46	-0,4931	0,0193	1,93
21	-1,94	-0,4738	0,0516	5,16
25	-1,42	-0,4222	0,1089	10,89
29	-0,89	-0,3133	0,1690	16,90
33	-0,37	-0,1443	0,2079	20,79
37	0,16	0,0636	0,1881	18,81
41	0,68	0,2517	0,1352	13,52

45	1,21	0,3869	0,0713	7,13
49	1,73	0,4582	0,0296	2,96
53	2,25	0,4878		

Для нахождения $\chi^2_{набл}$ составим таблицу:

Интервалы	m_i	np_i	$m_i - np_i$	$\left(m_i - np_i\right)^2$	$\left(m_i - np_i\right)^2 / np_i$
13-17	2	0,55			
17-21	1 (8)	1,93 (7,64)	0,36	0,13	0,02
21-25	5	5,16			
25-29	12	10,89	1,11	1,23	0,11
29-33	12	16,9	-4,9	24,01	1,42
33-37	23	20,79	2,21	4,88	0,24
37-41	18	18,81	-0,81	0,66	0,04
41-45	15	13,52	1,48	2,19	0,16
45-49	11 (12)	7,13 (10,09)	1,91	3,65	0,36
49-53	1	2,96			
Σ	100				2,35

Отсюда $\chi^2_{набл} = 2{,}35$. После объединения получили 7 интервалов (r =7). По таблице приложения 4 критических точек распределения χ^2 по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и $k = 7 - 3 = 4$ найдем $\chi^2_{кр}\left(0{,}05;\, 4\right) = 9{,}5$.

Так как $\chi^2_{набл} = 2{,}35 < \chi^2_{кр} = 9{,}5$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. ▷