

Числовые характеристики системы случайных величин

Задачи

1. Система двух дискретных случайных величин (X, Y) задана законом распределения:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
0	0,07	0,04	0,11	0,11
1	0,08	0,11	0,06	0,08
2	0,09	0,13	0,10	0,02

Вычислить коэффициент корреляции и выяснить, зависимы ли составляющие.

2. Система непрерывных случайных величин (X, Y) задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x, y) = \begin{cases} c(x + y), & \text{если } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти а) параметр c ; б) математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y ; в) корреляционный момент; г) коэффициент корреляции.

3. Двумерная дискретная случайная величина задана законом распределения

$X \backslash Y$	1	2	3
0	$\frac{1}{4}$	0	0
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

Вычислить $M(X), M(Y), M(X / Y = 2), D(X), D(Y), \rho_{xy}$.

4. Задана плотность распределения случайного вектора (X, Y) :

$$p(x, y) = \begin{cases} 2 \cos x \cos y, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

а) Найти математические ожидания составляющих.

б) Проверить, являются ли независимыми компоненты случайного вектора.

5. Случайные величины X и Y независимы и распределены по показательному закону с параметрами $\lambda_1 = 0,1; \lambda_2 = 0,4$. Найти плотность

распределения двумерной случайной величины случайные величины (X, Y) и вычислить $M(XY)$.

6. Система случайных величин (X, Y) распределена равномерно в квадрате $\{S = (x, y) \mid x \in [0; 1], y \in [0; 1]\}$. Показать, что случайные величины X и Y некоррелированы.
7. Задан закон распределения случайной величины (X, Y) имеет вид:

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$

Являются ли коррелированными случайные величины X и Y ?

8. Система непрерывных случайных величин (X, Y) задана плотностью распределения вероятностей: $p(x, y) = Axy$ внутри треугольника, ограниченного прямыми $x = 0, y = 0, x + y = 1$; $p(x, y) = 0$ вне этого треугольника. Найти параметр A , центр распределения, коэффициент корреляции ρ_{xy} .

Домашняя работа

9. Система дискретных случайных величин (X, Y) задана законом распределения:

$Y \backslash X$	-1	0	1
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Найти $M(X), M(Y), D(X), D(Y), \rho_{xy}$.

10. Система дискретных случайных величин (X, Y) задана законом распределения:

$Y \backslash X$	6	5	4	3
0,1	0,2	0,1	0,1	0
0,2	0,1	0,2	0,15	0
0,3	0	0	0,05	0,1

Будут ли зависимы случайные величины X и Y ?

11. Дана плотность распределения вероятностей непрерывного случайного вектора:

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2 + y^2), & |x| \leq 1, |y| \leq 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Будут ли зависимы случайные величины X и Y ?

12. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины:

$$p(x, y) = \begin{cases} a(1 - xy^3), & |x| \leq 1, |y| \leq 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти a и ρ_{xy} .

13. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины:

$$p(x, y) = \begin{cases} 2 \sin(2x + 2y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти $M(X), M(Y), D(X), D(Y), \rho_{xy}$.

Дополнительные задачи для самостоятельной работы

14. Система дискретных случайных величин (X, Y) задана законом распределения:

$Y \backslash X$	1	2	3
0	0,15	0,3	0,35
2	0,05	0,05	0,1

Доказать, что случайные величины X и Y некоррелированы. Можно ли утверждать, что они независимые?

15. В урне содержится 4 белых и 2 черных шара. Из нее извлекают 2 шара без возвращения. Пусть X – число извлеченных белых шаров, Y – число извлеченных черных шаров. Составить закон совместного распределения системы случайных величин (X, Y) . Доказать, что случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью.
16. Плотность совместного распределения случайных величин X и Y задана формулой:

$$p(x, y) = \begin{cases} c(x + y), & \text{если } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент c ; б) центр распределения; в) дисперсии составляющих; 4) ковариацию X и Y .