

Системы случайных величин

Задачи

1. Система двух дискретных случайных величин (X, Y) задана законом распределения:

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Найти законы распределения составляющих и условный закон распределения случайной величины $X / Y = -1$.

2. Система двух дискретных случайных величин (X, Y) задана законом распределения:

$Y \backslash X$	1	2	3	4
10	0,2	0,02	0,01	0
20	0,03	0,3	0,02	0
30	0,02	0,1	0,2	0,1

Найти законы распределения составляющих и условное распределение случайной величины $Y / X = 30$.

3. Дана функция распределения непрерывного случайного вектора (X, Y) :

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin y, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате эксперимента случайная точка (X, Y) попадет в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$,

$$y = \frac{\pi}{4}, y = 0.$$

4. Дана функция распределения двумерного случайного вектора (X, Y) :

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти его плотность распределения.

5. Дана плотность распределения непрерывного случайного вектора (X, Y) :

$$p(x, y) = \begin{cases} 0,5 \sin(x + y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти его функцию распределения.

6. Дана плотность распределения непрерывного случайного вектора (X, Y) :

$$p(x, y) = \begin{cases} C \sin(2x + 2y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определить значение параметра C .

7. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения:

$$p(x, y) = \begin{cases} A e^{-x-y}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти значение параметра A , плотности распределения составляющих и условные плотности распределения.

8. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) :

$$p(x, y) = \frac{A}{\pi^2 (16 + x^2)(1 + y^2)}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Найти значение параметра A ; функцию распределения $F(x, y)$;

вероятность того, что в результате эксперимента случайная точка (X, Y) попадет в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0, x = \pi,$

$$y = 0, y = \frac{\pi}{4}.$$

9. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осями координат. Найти:
а) плотность распределения системы (X, Y) ;
б) плотности распределения составляющих.

Домашняя работа

10. Двумерная случайная величина задана законом распределения

$Y \backslash X$	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти: а) законы распределения составляющих; б) условный закон распределения случайной величины $Y / X = 5$.

11. Дана функция распределения непрерывного случайного вектора (X, Y) :

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти его плотность распределения.

12. Непрерывная двумерная случайная величина распределена равномерно внутри треугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(8;0)$, $B(0;8)$. Найти: а) плотность распределения системы (X, Y) ; б) плотности распределения составляющих; в) условные плотности распределения.

13. Плотность распределения вероятностей двумерного случайного вектора

$$(X, Y) \text{ имеет вид: } p(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате эксперимента случайная точка (X, Y) попадет в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

14. Дана функция распределения случайного вектора (X, Y) :

$$F(x, y) = \begin{cases} k \cdot (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y}), & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти значение параметра k ; плотность распределения $p(x, y)$.

Дополнительные задачи для самостоятельной работы

15. Система двух дискретных случайных величин (X, Y) задана законом распределения:

$Y \backslash X$	1	2	3	4
0	0,04	0,08	0,06	0,02
1	0,15	0,20	0,12	0,03
2	0,01	0,22	0,02	0,05

Найти законы распределения составляющих; условное распределение случайной величины $X / Y = 3$; условное распределение случайной величины $Y / X = 0$.

16. Плотность распределения вероятностей непрерывного случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$p(x, y) = \begin{cases} a(x^2 + xy), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти значение параметра A ; функцию распределения $F(x, y)$; вероятность того, что в результате эксперимента случайная точка (X, Y) попадет в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $y = 2$.

17. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения

$$p(x, y) = \begin{cases} C(R - \sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 \leq R; \\ 0, & x^2 + y^2 > R. \end{cases}$$

Найти: а) параметр C ; б) вероятность попадания случайной величины (X, Y) в круг радиуса 1 с центром в начале координат, если $R = 2$.

18. Система случайных величин (X, Y) распределена равномерно внутри квадрата со стороной $\sqrt{2}$, диагонали которого совпадают с осями координат. Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности и условные плотности составляющих системы.