

Занятие 5. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов

Задачи

1. В параллелограмме $ABCD$:
 - а) указать среди векторов \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{AD} равные, противоположные, коллинеарные, компланарные;
 - б) выразить \overline{AC} через: \overline{AB} и \overline{BC} ; \overline{CD} и \overline{AD} ; \overline{AB} и \overline{AD} .
2. Даны точки $A(-1; 0; 2)$, $B(1; -2; 3)$. Найти
 - а) координаты вектора \overline{AB} ; б) $|\overline{AB}|$.
3. Даны точки $A(-2; 2)$, $B(2; 6)$ и точка C – середина отрезка AB . Построить векторы \overline{AB} и \overline{BC} , найти их координаты и убедиться, что $\overline{AB} = -2\overline{BC}$.
4. Найти орт вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$ и проекцию вектора \vec{a} на ось Oy .
5. Даны точки $A(-2; p; 3)$, $B(-1; 0; 2)$ и $C(q; 1; 1)$. При каких значениях p и q векторы \overline{AB} и \overline{BC} равны?
6. Даны вектор $\overline{BC}(-1; -2; 3)$ и точка $B(-3; 1; -2)$. Найти координаты точки C .
7. Найти координаты вектора $3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b}(-2; 1; 0)$.
8. Найти координаты вектора \vec{p} , который коллинеарен и сонаправлен вектору $\vec{q}(-8; 16; 4)$ и $|\vec{p}| = \sqrt{21}$.
9. При каких значениях m и n векторы $\vec{a}(1; m; 2)$ и $\vec{b}(0,5n+1; 3; 1)$ коллинеарны?
10. Проверить, что точки $A(2; 1; 0)$, $B(0; 4; -3)$, $C(-2; 3; -5)$ и $D(2; -3; 1)$ являются вершинами трапеции. Найти длины оснований.
11. В параллелограмме $ABCD$ заданы векторы $\overline{AB}(-4; -4; 2)$, $\overline{CB}(-3; -6; 1)$ и точка $A(3; 8; -5)$. Найти координаты точки пересечения его диагоналей.
12. Даны векторы $\overline{AB}(\alpha; \beta; -6)$ и $\overline{AC}(4; 2; -3)$. При каких значениях α и β точки A , B и C лежат на одной прямой?
13. Даны векторы: $\vec{a}(-3; 2; 0)$, $\vec{b}(2; 0; -3)$. Найти $|2\vec{a} - \vec{b}|$.
14. Векторы $\vec{a}(5; -2; -1)$ и $\vec{b}(1; -5; 2)$, проведенные из точки $C(1; 4; -3)$ являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника. Найти координаты основания высоты треугольника, проведенной из вершины C .

15. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$.
16. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $\vec{a}(2; -4; 4)$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$.
17. Найти $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$, если $A(2; -1; 3)$, $B(0; -1; 2)$, $C(-1; -2; 3)$.
18. При каких m векторы $\vec{a}(1; 2m+1; -2)$ и $\vec{b}(m; 1; 2m)$, перпендикулярны.
19. Может ли вектор \vec{a} составлять с координатными осями углы: $\alpha = 45^\circ; \beta = 60^\circ; \gamma = 120^\circ$?
20. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}(-6; 2; 3)$.
21. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}(2; -1; 3)$ и $\vec{b}(-1; 3; 2)$.
22. Найти $pr_{\vec{b}}\vec{a}$, если $\vec{a}(-2; 2; 1)$, $\vec{b}(-3; 6; 2)$.
23. Найти работу силы $\vec{F}(2; -1; 4)$, если точка ее приложения перемещается из $B(3; 5; -2)$ в $C(2; 1; 0)$.
24. Найти скалярное произведение $(\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 0,5$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$.
25. Даны векторы $\vec{a}(p; 1; 1)$ и $\vec{b}(-1; -p; 2)$. При каких значениях p вектор $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярен вектору \vec{a} ?
26. Даны точки $A(-3; 2; -1)$ и $B(-1; 2; 1)$. Найти угол, образованный вектором \overline{AB} с положительным направлением оси Ox .
27. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(2; 2; 4)$, $B(3; 1; 0)$, $C(1; 0; 2)$.
28. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$.
29. Сила $\vec{F}(3; 5; -2)$ перемещает материальную точку из $B(4; 2; 3)$ в точку C , лежащую на оси Oy . Найти координаты точки C , если совершаемая при этом работа равна 4.
30. Даны вектор $\vec{a}(-1; 9; 2)$ и точка $A(4; 0; -3)$. Найдите длину вектора \overline{AB} , перпендикулярного вектору \vec{a} , если известно, что точка B принадлежит оси Oz .

Домашнее задание

31. Найти периметр треугольника с вершинами $A(1; 1; 0)$, $B(1; 2; 2)$ и $C(3; 2; 0)$.

32. Даны точки $A(0; -1; 2)$, $B(3; 2; 1)$ и $C(3; 1; 2)$. Найти координаты вектора $\overline{AB} + \overline{AC}$.
33. В треугольнике с вершинами $A(3; 7; -4)$, $B(2; -1; 1)$ и $C(1; 3; 0)$ найти длину средней линии, параллельной AC .
34. Лежат ли точки A , B , C на одной прямой, если:
- $A(3; -7; 8)$, $B(-5; 4; 1)$, $C(17; -40; 29)$;
 - $A(-5; 7; 12)$, $B(4; -8; 3)$, $C(13; -23; -6)$.
35. Даны векторы: $\vec{a}(-1; 0; 2)$, $\vec{b}(-2; 2; 0)$. Найти координаты вектора \vec{x} , если: а) $\vec{a} = \vec{x} + \vec{b}$; б) $3\vec{a} = \vec{b} + 0,5\vec{x}$.
36. При каких значениях x векторы $\vec{a}(-1; 1; 2)$ и $\vec{b}(x^2; x-2; x^2-12)$ коллинеарны?
37. В треугольнике ABC даны векторы $\overline{MN}(-2; 1; 0)$ и $\overline{AB}(3; -5; 6)$, точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Найти координаты вектора \overline{BC} .
38. Найдите скалярное произведение $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, если известно, что $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$.
39. Может ли вектор \vec{a} составлять с координатными осями углы: $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 150^\circ$?
40. Вектор \vec{a} составляет с положительным направлением оси Oz угол 120° . Найти координату a_z , если $|\vec{a}| = 6$.
41. Вычислить угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если: $\vec{a}(2; -2; 0)$, $\vec{b}(3; 0; -3)$.
42. При каком α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b}(4; \alpha; -7)$ перпендикулярны.
43. Даны вектор $\vec{a}(2; -3)$ и точка $A(4; 5)$. Найдите длину вектора \overline{AB} , если известно, что точка B принадлежит оси Oy и скалярное произведение $\vec{a} \cdot \overline{AB} = 1$.
44. Сила $\vec{F}(2; -3; 1)$ перемещает материальную точку из $B(3; 1; -2)$ в $C(4; -1; 3)$. Найти работу, совершаемую силой \vec{F} .
45. Найти $np_{AC} \overline{AB}$, если $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 4; 5)$, $C(-1; 0; 4)$.

46. При каких значениях m угол между векторами $\vec{a}(2; m; -4)$ и $\vec{b}(m; 1; 1)$ тупой.

Дополнительные задачи для самостоятельной работы

47. Даны векторы $\vec{a}(p; 0; -2)$ и $\vec{b}(-2; p; 0)$. При каких значениях параметра p модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равен $2\sqrt{2}$?

48. Найти координаты вектора \vec{p} , который коллинеарен и противоположно направлен вектору $\vec{q}(3; -5; -2)$, если $|\vec{p}| = 3\sqrt{38}$.

49. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD заданы векторы $\overrightarrow{AB}(-7; 4; 5)$, $\overrightarrow{AC}(3; 2; -1)$, $\overrightarrow{AD}(20; -4; -12)$. Найти координаты вектора \overrightarrow{MN} , если M и N – середины сторон AB и CD .

50. Что можно сказать о ненулевых векторах \vec{a} и \vec{b} , если:

а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; б) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; в) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$;

г) $\vec{a} + \vec{b}$ делит угол между векторами \vec{a} и \vec{b} пополам.

51. При каких значениях α векторы $\vec{a}(-1; 2)$; $\vec{b}(3; \alpha)$ образуют базис на плоскости?

52. Проверить, что четырехугольник $ABCD$ – квадрат, если: $A(-3; 5; 6)$, $B(-1; 8; 12)$, $C(5; 10; 9)$, $D(3; 7; 3)$.

53. Найти, при каких значениях x и y вектор $\vec{a}(3; y; -1)$ перпендикулярен вектору $\vec{b} = x\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$, а вектор \vec{b} – вектору $\vec{c}(1; 0,4y; -0,5)$.

54. Даны вектор $\vec{a}(-4; 2)$ и точка $A(3; 5)$. Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB}$, если известно, что точка B принадлежит оси Ox , и векторы \overrightarrow{AB} и \vec{a} коллинеарны.

55. В четырехугольнике $ABCD$ заданы $\overrightarrow{AB}(3; -1; -2)$, $\overrightarrow{BC}(-2; 5; 1)$, $\overrightarrow{AD}(-3; 4; 8)$, а \vec{m} и \vec{n} – его диагонали. Найти модуль скалярного произведения \vec{m} и \vec{n} .

56. Найти $pr_{\vec{b}}(\vec{a} + 2\vec{b})$, если $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b}(-2; 2; 1)$.