

Занятие № 32.

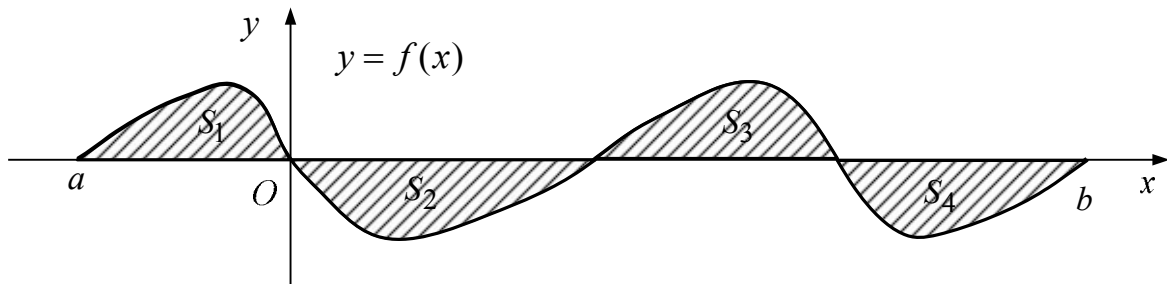
Определённый интеграл и его свойства

1. Вычислить интеграл $\int_0^1 (3f(x) - 5g(x)) dx$, если $\int_0^1 f(x) dx = 2$ и

$$\int_0^1 g(x) dx = 5.$$

2. Вычислить интеграл $\int_{-2}^4 3f(x) dx$, если $\int_0^{-2} f(x) dx = 5$ и $\int_0^4 3f(x) dx = 2$.

3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$



и даны числа S_1, S_2, S_3, S_4 – площади указанных фигур. Найти значение

интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

Вычислить интегралы:

4. $\int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx$.

5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

6. $\int_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos^2 x}$.

7. $\int_{12}^{25/2} \sqrt{25-2x} dx$.

8. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

9. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$.

10. $\int_{-2}^2 f(x) dx$, если $f(x) = \begin{cases} -4, & -2 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$

11. $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x}} dx$.

12. $\int_3^4 \frac{x^2 + 3}{x-2} dx$.

13. $\int_0^{\pi/3} \cos^2 \varphi d\varphi$.

14. $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$.

15. Вычислить работу силы, направленной вдоль оси Ox , величина которой равна $F = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, по перемещению тела из точки $x = 0$ в точку $x = 3$.

16. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 5 см, если сила в 1 н растягивает ее на 1 см.

Указание. По закону Гука сила F возрастает пропорционально растяжению x пружины: $F = kx$.

17. Скорость тела дается формулой $v = 1 + 2t$ (м/сек). Найти путь, пройденный телом за первые 10 сек после начала движения.

Указание. Путь, пройденный телом за промежуток времени от момента $t = t_1$ до момента $t = t_2$, равен определенному интегралу от модуля скорости:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt.$$

18. Найти $F'(0)$, если $F(x) = \int_0^x \frac{2dt}{1+4t^2}$.

19. Вычислить интеграл $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \cdot \cos x dx$, используя свойства.

20. Сравнить интегралы: $I_1 = \int_{-1}^0 e^{x^2} dx$ и $I_2 = \int_{-1}^0 e^{x^3} dx$.

21. Не вычисляя интеграл $I = \int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx$, оценить его величину.

22. Найти среднее значение функции $f(x) = \cos 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{12}\right]$.

23. Найти среднее значение функции $f(x) = \frac{36}{9+x^2}$ на отрезке $[\sqrt{3}; 3]$.

Домашнее задание

24. Найти интеграл $\int_{-2}^3 (4f(x) + 3g(x)) dx$, если $\int_{-2}^3 f(x) dx = 4$ и

$$\int_3^{-2} g(x) dx = 2.$$

25. Найти интеграл $\int_{-1}^1 2f(x) dx$, если $\int_{-1}^{1/2} f(x) dx = -2$ и $\int_{1/2}^1 2f(x) dx = 3$.

26. Найти $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

Вычислить интегралы:

$$27. \int_0^1 (x^3 + x\sqrt{x}) dx.$$

$$28. \int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$29. \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

$$30. \int_0^{\pi/4} \sin^2 \varphi d\varphi.$$

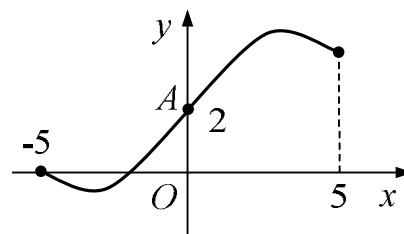
$$31. \int_{-1}^{\pi/2} f(x) dx, \text{ если } f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0; \\ \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

32. Найти среднее значение функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[0; 1]$.

Дополнительные задачи для самостоятельной работы

33. График непрерывной функции $y = f(x)$ (см. рис.) симметричен относительно точки

$A(0; 2)$. Вычислить интеграл $\int_{-5}^5 f(x) dx$.



Вычислить интегралы:

$$34. \int_{-2}^1 |2x-3| dx. \quad 35. \int_{-2}^2 x^6 \sin 2x dx.$$

$$36. \int_0^2 f(x) dx, \text{ если } f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ \sqrt{x}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

37. Не вычисляя интеграл $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$, указать его значение, используя геометрический смысл.

38. Вычислить работу силы, направленной вдоль оси Ox , величина которой равна $F = \frac{4}{x^2}$, по перемещению тела из точки $(2; 0)$ в точку $(3; 0)$.

39. Определить объем продукции, произведенной рабочим за второй час рабочего дня, если производительность труда $f(t) = \frac{1}{2t+1} + 2$ (t – время).

Указание. Если $f(t)$ – производительность труда в зависимости от времени t , то объем продукции V при $t_1 \leq t \leq t_2$ вычисляется по формуле

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$