

Занятие № 1. Определители. Операции над матрицами. Ранг матрицы

Задачи

Вычислить определители:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix}. \quad 3. \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -2 \\ 3a & \sqrt{a} \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители, разложив по элементам какой-либо строки или столбца:

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}. \quad 5. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}. \quad 6. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & a \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители, предварительно их упростив, используя свойства, и сделав в какой-либо строке или столбце два элемента равными нулю, или приведя их к треугольному виду:

$$7. \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 15 & -10 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}. \quad 8. \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & 5 \\ -1 & 9 & 3 \end{vmatrix}. \quad 9. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 16 & 10 & 2 \end{vmatrix}.$$

10. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица

второго порядка. Найти:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } A + B; & \text{б) } 2A + 3B; & \text{в) } AB; \\ \text{г) } A^2 + 3E; & \text{д) } AB - BA; & \text{е) } \det(AB) - \det A \cdot \det B. \end{array}$$

11. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти: а) AA^T ; б) $\det(A^T A)$.

12. Найти произведение матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \quad -2 \quad -3).$$

Найти ранг матрицы:

$$13. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}. \quad 14. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание

Вычислить определители:

15. $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 2\cos x & 2\sin x \\ -2\sin x & 2\cos x \end{vmatrix}$.

17. Дан определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. Найти миноры и алгебраические

дополнения элементов a_{13} , a_{32} .

Вычислить определители двумя способами: используя разложение определителей по строке и приведением их к треугольному виду:

18. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

20. Решить уравнение и сделать проверку: $\begin{vmatrix} x^2 & 4 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 0$.

21. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x & 1 \\ x & 0 & -x \end{vmatrix} \geq -1$.

22. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти:

а) $3A - 2B$; б) $A(A - B)$; в) $\det(A^T B^T + 2E)$ (E – единичная матрица второго порядка).

23. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти $AC + BC$ и $(A + B)C$.

Найти произведение матриц:

24. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

26. Найти $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 9x + 20$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти ранг матрицы:

$$27. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$28. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Дополнительные задачи для самостоятельной работы

Решить уравнения и сделать проверку:

$$29. \begin{vmatrix} 2 & x-3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 30. \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad 31. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ \log_2 x & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Решить неравенства:

$$32. \begin{vmatrix} x & x+1 & 1 \\ -4 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0. \quad 33. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ \log_{\frac{1}{2}} x & 1 & -5 \end{vmatrix} \leq 0.$$

$$34. \text{Вычислить определитель} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$35. \text{Пусть } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{Найти матрицу } X \text{ из}$$

уравнения $A^T + 2X = -2B$.

$$36. \text{Найти матрицу } X \text{ из уравнения: } \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2X = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 6 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

37. Найти $f(A)$, если $f(x) = -2x^2 + 5x + 9$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

38. Даны функции $f(x) = 2x - 3$ и $g(x) = x^2 + 1$. Найти $f(A) - g(B)$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

39. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ при различных значениях λ .

40. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. Найти λ , при котором $\text{rang} A = 2$.