

Элементарные функции комплексного переменного

Задачи

Найти образ W_0 точки z_0 при отображении $W = e^z$, найти $|W_0|$, $\operatorname{Re} W_0$, $\operatorname{Im} W_0$, если:

1. $z_0 = \frac{\pi}{2}i$. 2. $z_0 = 2\pi i$. 3. $z_0 = -1 + \frac{\pi}{6}i$.

Вычислить, указав действительные и мнимые части полученных значений:

4. e^{3i} . 5. $\sin(2i)$. 6. $\operatorname{ch}(3i)$.

7. Доказать, используя условия Коши – Римана (10.5), что функция $W = e^{2z}$ аналитическая на всей плоскости и найти ее производную, используя формулу (10.6).

8. Доказать равенство: $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

Найти действительную и мнимую часть функций:

9. $W = e^{2z+3i}$. 10. $W = \sin(iz - 1)$. 11. $W = \cos(z - i)$.

Найти образ W_0 точки z_0 при отображении:

12. $W = \cos z$, $z_0 = 2 - i$. 13. $W = \operatorname{ch}(iz)$, $z_0 = 1 + 2i$.

14. Найти значение производной функции $f(z) = z^3 + 2iz$ в точке $z_0 = 3 - 2i$.

15. Найти образ линии $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{3}$ при отображении $W = e^z$.

16. Найти образ области $0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}$ при отображении $W = e^z$.

Домашнее задание

17. Отделить действительные и мнимые части функций:

а) $f(z) = e^{5iz+1}$, б) $f(z) = \sin(z + \pi i)$, в) $f(z) = \operatorname{ch}(z + i)$.

18. Вычислить: а) e^{1-i} , б) $\cos(3 - 2i)$.

19. Доказать, используя условия Коши – Римана (10.5), что функция $W = f(z)$ аналитическая на всей плоскости и найти ее производную, используя формулу (10.6), если

а) $W = z^2$, б) $W = \sin z$.

Дополнительные задачи для самостоятельной работы

20. Найти образ области $\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < 2, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}. \end{cases}$ при отображении $W = e^z$.

21. При каких z функция $W = e^z(1+i)$ принимает только
а) действительные значения; б) только мнимые значения.

22. В каких точках функция $f(z) = \frac{e^{2zi}}{z^2 + 4}$ не имеет производной?