

**Геометрическое истолкование однозначной функции
комплексного переменного. Производная
Задачи**

Найти образ точки z_0 при отображении $W = f(z)$:

1. $z_0 = 1 - i$, $W = z^2 + iz$. 2. $z_0 = 2 + 3i$, $W = \frac{1}{z+i}$.
3. $z_0 = -2 + 2i$, $W = x - y + i(x^2 - y^2)$. 4. $z_0 = 2i$, $W = \frac{x+iy}{x+y+2}$.

Отделить действительную часть и мнимую часть функции $W = f(z)$,
положив $z = x + iy$:

5. $W = z^2$. 6. $W = \frac{1}{z}$. 7. $W = \frac{z-1}{z+1}$.

8. Отделить действительную часть и мнимую часть функции $W = z^4$,
положив $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

9. Найти образ линии $\text{Im } z = 1 - \text{Re } z$ при отображениях:

- а) $W = 3z + i$, б) $W = z^2$.

10. Найти образ линии $|z| = 2$ при отображениях:

- а) $W = z^4$, б) $W = \frac{1}{z}$.

11. В какую область функция $W = \frac{1}{z}$ преобразует области:

- а) $1 < \text{Re } z < 2$, б) $\begin{cases} |z| < \frac{1}{2}, \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$?

12. Найти образ линии $\begin{cases} \arg z = \frac{\pi}{12}, \\ 0 < |z| < \infty \end{cases}$ при отображении $W = z^3$.

13. Показать, что условия Коши – Римана для функции
 $W = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ выполняются в каждой точке и найти
производную W' этой функции.

14. Показать, что функция $W = \bar{z}$ не имеет производной ни в одной точке.

Домашнее задание

Найти образ точки z_0 при отображении $W = f(z)$:

15. $z_0 = 2i$, $W = (1+z)^2$. 16. $z_0 = 1+i$, $W = z^{10}$.
17. $z_0 = -1+i$, $W = \frac{z+1}{z+i}$.

18. Найти образ линии $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2 + 1$ при отображении $W = 2z + 1$.

19. Найти образ области: $\begin{cases} |z| < 2, \\ -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6} \end{cases}$ при отображении $W = z^2$.

Найти производную функции $W = f(z)$, там, где она существует:

20. $W = x + 2y + i(2x + y)$. 21. $W = z \cdot \operatorname{Re} z$. 22. $W = \frac{1}{z}$.

Дополнительные задачи для самостоятельной работы

При каких значениях z функция $W = f(z)$ принимает а) только действительные значения; б) только мнимые значения:

23. $W = 3z^2 + i$. 24. $W = \frac{1}{z + 2 + i}$.

25. Найти образ области: $\begin{cases} 1 < |z + i| < 3, \\ -\frac{\pi}{4} < \arg(z + i) < -\frac{\pi}{6} \end{cases}$

при отображении $W = (z + i)^2$.

26. Точка $z = x + iy$ движется по линии: $|z| = 2$. По какой линии движется точка $W = 1 - 2i - 3z$?

27. Точка $z = x + iy$ движется по линии: $|z - 1| = 1$. По какой линии движется точка $W = \frac{1}{z}$?