

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Дифференциал. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Производные высших порядков

Задачи

Найти дифференциал функции:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$. 2. $y = \sqrt{x^2 + 1}$. 3. $s = \frac{1}{t^2}$.

4. $d(\sin^2 t)$. 5. $y = x(\ln x - 1)$.

6. Определить Δy и dy для функции $y = x^2 - 2x$ и вычислить их при изменении x от 3 до 3,01.

Для функции, заданной параметрическими уравнениями, найти y'_x :

7. $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. 8. $x = t^5 + 2t$, $y = t^2 - 8t + 1$, $t \in \square$.

9. $x = t \ln t$, $y = 3t - tg 3t$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$. 10. $x = t \cdot 3^{-2t}$, $y = t^3 - 3^t$, $t \in (-\infty; 0)$.

Найти производную $y'(x)$ для функции $y(x)$, заданной неявно уравнением:

11. $x^3 - 2x^2y^2 + 5x - y - 5 = 0$. 12. $x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0$.

Найти производные второго порядка от функций:

13. $y = x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x$. 14. $y = \cos 5x + e^{3x}$. 15. $y = \frac{x^4}{12} + \ln x$.

16. $y = e^{-x^2}$. 17. $y = \frac{x}{x+1}$. 18. $y = x^2 \cdot (2 \ln x - 3)$. 19. $y = \sin^2 x$.

20. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ от функции, заданной параметрическими уравнениями:

а) $x = t^2 + 1$, $y = \frac{t^3}{3} - t$, $t \in (0; +\infty)$; б) $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \ln(1 + t^2)$, $t \in \square$.

21. Закон движения точки по координатной прямой выражается уравнением $x = 4 + 12t - 0,25t^2$ (x – в метрах, t – в секундах). Найти скорость точки в момент времени $t_0 = 8$ [с]. В какой момент времени скорость точки равна нулю?

22. Найти моменты времени, в которые скорость точки равняется нулю, если закон ее движения по координатной прямой имеет вид: $x = t^3 - 3t^2 + 1$ (x – в метрах, t – в секундах).

23. Материальная точка движется вдоль оси Ox по закону $x = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 5$ (x – в метрах, t – в секундах). Найти расстояние между остановками точки (начало движения $t_0 = 0$).

24. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$s = -\frac{t^3}{3} + t^2 + 3t + 1$ (s – в метрах, t – в секундах). Найти скорость в момент времени, когда ускорение равно нулю.

25. Тело движется прямолинейно по закону $s = \sqrt{t}$ (s – в метрах, t – в секундах). Найти скорость и ускорение тела в момент времени $t = 4$.

Домашнее задание

26. Найти дифференциалы функций:

а) $y = \arctg e^x$; б) $y = e^{\cos x}$; в) $y = \frac{1}{2} \ln^2 x$.

27. Найти производную $y'(x)$ для функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

28. Для функций, заданных параметрическими уравнениями, найти $y'(x)$:

а) $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$, $t \in \mathbb{R}$; б) $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

29. Найти производные второго порядка от заданных функций:

а) $y = x \sqrt{1 + x^2}$; б) $y = x^2 \ln x$.

30. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$ от функции, заданной параметрическими уравнениями:

$x = \ln t$, $y = \frac{1}{t}$, $t \in (0; +\infty)$.

31. Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

32. При движении тела по прямой скорость v (м/с) изменяется по закону $v(t) = 3t^2 - 2t + 1$ (t – время движения в секундах, начало движения $t_0 = 0$).

Найти ускорение тела через 3 секунды после начала движения.

33. При движении точки по прямой положение точки на прямой изменяется по закону $s(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + t^2 + 1$ (t – время в секундах, начало движения $t_0 = 0$).

Найти скорость точки через 4 секунды после начала движения.

Дополнительные задачи для самостоятельной работы

34. Показать, что функция $y = e^x \cos x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 2y' + 2y = 0$.

35. Найти $y'(x)$, если $x = e^{-t^2}$, $y = \operatorname{arctg} 2t$, $t \in (0; +\infty)$.

36. Написать уравнение касательной к циклои-

де: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в точке, для которой $t = \frac{\pi}{2}$.

37. Написать уравнения касательных к окружности

$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью Ox .

38. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$ от функции, заданной параметрическими уравнениями:

а) $x = t^2$, $y = t^3 + t$, $t \in (0; +\infty)$; б) $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

39. Показать, что функция $y = y(x)$, заданная параметрическими уравнения-

ми: $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяет уравнению:

$$y''(x + y)^2 = 2(xy' - y).$$

40. Материальная точка движется вдоль оси Ox по закону $x = (t - 2)(t - 3)^3$

(x – в метрах, t – в секундах, начало движения $t_0 = 0$).

Найти: а) скорость в момент прохождения начала координат; б) расстояние между остановками точки; в) путь, пройденный от начала движения до первой остановки; г) удаление точки от начального положения в момент второй остановки.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

41. $\operatorname{arctg} 1,05$.

42. $\sqrt[4]{15,8}$.