

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Производная по направлению, физический смысл, градиент, его свойства.

Задачи

1. Найти производную функции $u = (x^3 y^2 - 1)z + \ln(y + z)$ в точке $M(1; 2; -1)$ по направлению вектора $\vec{s} = (1; -2; 2)$.
2. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3; 1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(6; 5)$.
3. Найти и построить градиент функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M(3; 2)$.
4. Найти градиент функции $u = e^{x+2y} + x \ln z$ в точке $M(1; 0; 1)$.
5. Для функции $z = x \ln y$ найти точку $(x_0; y_0)$, в которой $\overrightarrow{\text{grad}} z = \vec{i} + 2\vec{j}$.
6. Найти все точки, в которых модуль градиента функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 6.
7. Найти угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ в точках $A\left(1; -1; -\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(-\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$.
8. Найти наибольшую скорость возрастания скалярного поля $u = 2x^3 y - 3yz + 4z^2$ в точке $N(1; 2; -1)$.
9. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня скалярного поля $u = x^2 - y^2 + 2z^2$ в точке $M_0(1; -1; -1)$.
10. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к однополостному гиперболоиду $x^2 + 2y^2 - z^2 - 5 = 0$ в точке $P_0(2; -1; 1)$.

Домашнее задание

11. Найти производную функции $z = \frac{3x}{y^2}$ в точке $M(3; 4)$ по направлению вектора $\vec{s} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$.
12. Найти производную функции $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точке $A(1; 2; -1)$ по направлению, идущему из точки A в точку $B(2; 4; -3)$.
13. Найти градиент функции $u = e^{x+2y} + x \ln z$ в точке $M(1; 0; 1)$.

14. Найти все точки, в которых модуль градиента функции

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 \text{ равен } 2.$$

15. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = 3x^2 - 2y^2 + xy - x + y \text{ в точке } P_0(x_0; y_0; z_0), \text{ если } x_0 = 1, y_0 = 3.$$

Дополнительные задачи

16. Найти производную функции $z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$ в точке $M(1; -2)$ по

направлению вектора $\vec{s} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$.

17. Найти и построить линии уровня скалярного поля $z = (x - y)^2$. Найти и построить вектор $\overrightarrow{\text{grad}} z$ в точках $A(1; -1)$ и $B(1; 1)$.

18. Для функции $z = 2^x \log_2 e + y \ln y - 7x - 5y + 8$ найти точку $(x_0; y_0)$, в которой $\overrightarrow{\text{grad}} z = 9\vec{i} - 4\vec{j}$.

19. В каких точках пространства $Oxyz$ градиент поля

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - xyz \text{ перпендикулярен к оси } Oz?$$

20. К поверхности $z = 5x^2 + 6xy$ проведена касательная плоскость, параллельная плоскости $4x + 6y - z + 2 = 0$. Найдите координаты точки касания.