

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные. Полный дифференциал и его применение

Задачи

Найти частные производные первого порядка по каждой из независимых переменных:

1. $z = x^4 + 3xy^2 + y^5$.

2. $z = 2^{xy}$.

3. $z = y \sin(2x + 3y)$.

4. $u = \ln(x^2 - y^3 + z^4)$.

5. Дана функция $z = (2x + 3y)^4$. Найти $z'_x(M)$, $z'_y(M)$, если $M(1; -1)$.

Найти частные производные второго порядка:

6. $z = \ln(x + 3y)$.

7. $z = e^{x^2+3y}$.

8. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = x^3 y^5$.

9. Найти полный дифференциал первого порядка функции $z = x^4 y^2 - x^3 y^3 + x^2 y^4$.

Найти частные производные 1-го и 2-го порядков данных функций:

10. $z = xy - \frac{y}{x}$.

11. $z = \frac{\cos(x^2)}{y}$.

12. Показать, что функция $z = \ln(x + e^{-y})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

13. Найти полный дифференциал первого порядка функции $u = xy^2 z^3$.

14. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

Домашнее задание

Найти частные производные 1-го и 2-го порядков данных функций:

15. $z = x^3 \sin y$.

16. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

17. Показать, что функция $z = \cos(x + 3y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

18. Найти полный дифференциал первого порядка функции $z = (x^2 + y^5)^3$ в точке $M(1; 1)$.

19. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить $\sqrt{1,98^3 + 1,03^2}$.

Дополнительные задачи

20. Найти частные производные 1-го и 2-го порядков функции

$$z = \cos^2\left(2x + \frac{3}{2}y\right).$$

21. Показать, что функция $z = \frac{\sin(x-y)}{x}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) - x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

22. Показать, что функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ удовлетворяет уравнению

Лапласа:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

23. Найти полный дифференциал первого порядка функции $u = y^{\frac{x}{z}}$.

24. Прямоугольный параллелепипед имеет измерения: $a = 6$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м. Как приближенно изменится длина диагонали параллелепипеда, если a увеличить на 2 см, b – на 3 см, а c уменьшить на 4 см?