9.1. Вычисление пределов

9.1.1. Непосредственное раскрытие неопределенностей вида (∞/∞), $(\infty-\infty)$, $(\infty\cdot 0)$, $(0/0)$.

В большинстве случаев, подставляя $x=x_0$ в функцию, получают предельные соотношения вида: (∞/∞), $(\infty-\infty)$, $(\infty\cdot 0)$, $(0/0)$, (1^{∞}), (∞^{0}), (0^{0}). Их называют неопределенностями, которые при вычислении предела следует "раскрыть", т.е., анализируя предельную ситуацию, надо узнать, что же "скрывается" под той или иной неопределенностью в каждой конкретной задаче.

Правило 1. Неопределенность (∞/∞) раскрывают, максимально сокращая дробь на выражение, стремящееся к бесконечности.

Например,

1. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot 5^{x}+7\cdot 2^{x}}{5^{x+2}+2^{x+3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^{x}\left(2+7\cdot(2/5)^{x}\right)}{5^{x}\left(25+8\cdot(2/5)^{x}\right)}=$$

$$=\left(\frac{2+7\cdot(2/5)^{+\infty}}{25+8\cdot(2/5)^{+\infty}}\right)=\frac{2+7\cdot 0}{25+8\cdot 0}=\frac{2}{25};$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{2}+4x-7}{11x+10}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}\left(3+4/x-7/x^{2}\right)}{x(11+10/x)}=\left(\frac{\infty}{11}\right)=\infty.$$ Здесь отношение ББ к ограниченной есть величина ББ (или произведение ограниченной, не равной нулю, на ББ есть ББ).

В случае предела отношения степенных функций при $x\to\infty$, нетрудно доказать (сокращая дробь на x^{m} $-$старшую степень знаменателя).

Правило 2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}\infty, & \text{если}\quad n>m\\ 0, & \text{если}\quad n<m\\ p_0/q_0, & \text{если}\quad n=m,\end{cases}$$

где p_0 и q_0–обобщенные (суммарные) коэффициенты при старшей степени переменой x соответственно в числителе и в знаменателе.

Например,

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^{2}-(x-1)^{2}}{8x+9}=\left(\frac{\infty-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}+4x+4-x^{2}+2x-1}{8x+9}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6x+3}{8x+9} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$, т.к. 1=1.

Рассмотрим пример, в котором последовательно применяются оба правила (1 и 2).

4. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!+(n+2)!}{(n+1)!(3n+2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!+n!(n+1)(n+2)}{n!(n+1)(3n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\big(1+(n+1)(n+2)\big)}{n!(n+1)(3n+2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{3},$$ т.к. 2=2. (Здесь использовано определение факториала $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$).

Замечание 1. Неопределенность $(\infty-\infty)$ может быть сведена к дробной неопределенности (∞/∞) или к $(0/0)$ либо приведением к общему знаменателю, либо домножением и делением на сопряженное выражение, либо вынесением за скобку одного из бесконечных слагаемых.

Замечание 2. Неопределенность $(\infty\cdot 0)$ приводится к виду (∞/∞) или $(0/0)$ следующим образом: пусть при $x\to x_0$ $f(x)\to\infty$, $\varphi(x)\to 0$, тогда при $x\to x_0$:

$$f(x)\cdot\varphi(x) = (\infty\cdot 0) = \frac{f(x)}{1/\varphi(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{\varphi(x)}{1/f(x)} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Например:

5. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+5x} - \sqrt{3x^2+7}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-(3x^2+7)}{\sqrt{3x^2+5x}+\sqrt{3x^2-7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x-7}{\sqrt{3x^2+5x}+\sqrt{3x^2+7}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{\pm 5}{2\sqrt{3}},$$ т.к. 1=1 (соответственно при $x\to\pm\infty$);

6. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3x}+\frac{3}{x^2}\right)(4x-1) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to\infty}\frac{(2x+9)(4x-1)}{3x^2} = \frac{2\cdot 4}{3} = \frac{8}{3},$$ т.к. 2=2.

Правило 3. Неопределенность $(0/0)$ при $x\to x_0 \ne \infty$ раскрывают, сокращая дробь на $(x-x_0)^p$, т.е. на выражение, стремящееся к нулю. Здесь $p>0$ – некоторый показатель (часто $p=1$).

Выделять в числителе и знаменателе множитель $(x-x_0)^p$ можно пользуясь формулами сокращенного умножения или находя остальные их корни (ведь один корень $x = x_0$ уже известен), или делением "уголком" числителя и знаменателя (если они – алгебраические многочлены) на разность $x - x_0$.

Если выделению указанного множителя $(x - x_0)^p$ мешает иррациональность, то сначала от нее избавляются домножением и делением дроби на сопряженное выражение. Приведем **несколько примеров** раскрытия неопределенности $(0/0)$:

$$\mathbf{7}.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}=\frac{3}{2}.$$

$$\mathbf{8.}\ \lim_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{x^4-16}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{3(x+2)\big(x-1/3\big)}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{3x-1}{(x-2)(x^2+4)}=\frac{-7}{-32}=\frac{7}{32}.$$

$$\mathbf{9}.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^3-6x^2+9x}{x^3-2x^2-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x(x^2-6x+9)}{(x-3)(ax^2+bx+c)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)^2}{(x-3)(x^2+x+3)}=\left(\frac{0}{9}\right)=0.$$

Здесь второй множитель знаменателя получен делением "уголком" знаменателя на известный множитель $(x-3)$. См. схему деления далее.

$$\begin{array}{l|l}
x^3-2x^2-9 & x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-3x^2} & x^2+x+3 \\
\quad -\ x^2-9 & \\
\quad\ \ \underline{x^2-3x} & \\
\qquad\quad 3x-9 & \\
\qquad\quad \underline{3x-9} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\mathbf{10.}\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5x+6}+x}{2x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{(5x+6)-x^2}{(2x+2)(\sqrt{5x+6}-x)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)(x-6)}{2(x+1)(\sqrt{5x+6}-x)}=\frac{7}{4}.$$

В данном примере для выявления в числителе множителя $(x+1)$ умножили числитель и знаменатель на сопряженное числителю выражение $(\sqrt{5x+6}-x)$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+11x}{x^2-1}-\dfrac{6}{x-1}\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+11x-6x-6}{(x-1)(x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{(x-1)(x+1)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{7}{2}.$

9.1.2. Специальные пределы

Изложенные правила 2,3 раскрытия неопределенностей рассчитаны на степенные функции, т.к. основаны на сокращении дроби на x^m или $(x-x_0)^p$, что уже достаточно трудно сделать в иррациональных и невозможно в трансцендентных функциях. Поэтому для таких функций рассмотрим некоторые "шаблонные" пределы, называемые специальными или замечательными пределами.

1. ***Первый специальный предел*** $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1.$

При вычислении пределов тригонометрических функций с неопределенностью $(0/0)$ используют первый специальный предел. **Например**:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg5x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot\dfrac{5x}{tg5x}\cdot\dfrac{4x}{5x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{tg5x}\cdot$

$\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{5x}=1\cdot 1\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}.$

Приведенный способ использования специальных пределов (выделением его структуры в функции искомого предела) является достаточно громоздким. Позже будет показано их более рациональное применение через эквивалентные функции.

При вычислении пределов следует обращать особое внимание на наличие, характер или отсутствие неопределенности, т.е. на содержание предела, а не только на его форму (вид функции). Например:

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\left(\dfrac{\text{ограниченн ая}}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\sin x\right)=(\text{БМ}\cdot\text{огранич.})=0$;

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x}{\sin x}=\left(\dfrac{\pi}{0}\right)=\infty$;

2. ***Второй специальный предел*** является определением числа e (основания натуральных логарифмов $\ln x=\log_e x$):

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\left(1^{\infty}\right)=e \text{ или } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=(1^{\infty})=e,$$

где $e\approx 2{,}71828\ldots\approx 2{,}72$ (иррациональное число).

Вычислим несколько пределов с его использованием:

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{x+3}{5x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{\frac{2x}{1}\cdot\frac{x+3}{5x}\left(\frac{0}{0}\right)}=e^{\frac{6}{5}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x+5}{2x-1}-1\right)^{3x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{6}}\right)^{18x/(2x-1)}=e^{9}$$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\left(4x-11\right)^{\frac{x}{x-3}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left((1+(4x-12))^{\frac{1}{4x-12}}\right)^{\frac{(4x-12)x}{x-3}\left(\frac{0}{0}\right)}=e^{12}$.

3. ***Третий специальный предел*** $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$.

Пример использования третьего специального предела:

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{5x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{4}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{4x}=\dfrac{4}{5}\cdot 1=\dfrac{4}{5}$;

4. ***Четвертый специальный предел*** $\lim\limits_{z\to 0}\frac{a^z-1}{z}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ln a$, $(a>0, a\neq 1)$

При $a=e$ получается широко применяемый частный случай четвертого специального предела $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$.

Продемонстрируем использование четвертого специального предела на **примерах**:

8. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{2^{\sqrt{x}}-1}{x-3\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\cdot\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{x}-3}=\ln 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{\ln 2}{3}$;

5. ***Пятый специальный предел*** имеет вид

$$\lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^p-1}{z}=\left(\frac{0}{0}\right)=p$$

Пример его применения:

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-7x}-1}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\frac{7}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-7x)^{1/3}-1}{-7x}=-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{7}{6}$;

Напомним, что более совершенное использование всех специальных пределов, кроме второго, будет приведено далее после знакомства с эквивалентными бесконечно малыми.

9.1.3. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Использование эквивалентных функций при вычислении пределов

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to x_0$ (x_0-как конечное число, так и $x_0=\infty$) и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$. Тогда:

а) если $k\neq 0$, $k\neq\infty$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ суть **БМ одного порядка малости** при $x\to x_0$;

б) если $k=0$, то функция $\alpha(x)$ является **БМ более высокого порядка** малости, чем $\beta(x)$, при $x\to x_0$, что обозначают специальным символом: $\alpha=o(\beta)$ при $x\to x_0$ (читается: "o- малое от β"), и при этом функцию $\alpha(x)$ можно представить в виде произведения $\beta(x)$ на некоторую БМ $\delta(x)$

при $x \to x_0$, т.е. $\alpha(x) = \beta(x) \cdot \delta(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \delta(x) = 0$, а если учесть, что бесконечно малую иногда обозначают $o(1)$, то $\alpha(x) = \beta(x) \cdot o(1)$.

в) если $k = \infty$, то $\beta = o(\alpha)$ при $x \to x_0$ и при этом $\beta(x) = \alpha(x) \cdot o(1)$.

Если предел отношения бесконечно малых при $x \to x_0$ не существует ни конечный, ни бесконечный, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ **не сравнимы** при $x \to x_0$. Например, $\alpha = x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}$ и $\beta = x^2$ - несравнимые БМ при $x \to 0$, или $\alpha = e^{-x}$ и $\beta = e^{-x} \cdot \sin x$ - несравнимые БМ при $x \to +\infty$.

Аналогично сравниваются бесконечно большие величины.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)/\varphi(x)\right) = (\infty/\infty) = k$. Тогда:

а) если $k \neq 0$, $k \neq \infty$, то $f(x)$ и $\varphi(x)$ – **ББ одного порядка роста** при $x \to x_0$;

б) если $k = \infty$, то $f(x)$ – **ББ более высокого порядка роста**, чем $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, при этом пишут $|f(x)| >> |\varphi(x)|$ при $x \to x_0$;

в) если $k = 0$, то $|\varphi(x)| >> |f(x)|$ при $x \to x_0$.

В частности , если для функций одинакового порядка при $x \to x_0$ (БМ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ или ББ $f(x)$ и $\varphi(x)$) предел их отношения $k = 1$, то эти функции называются **эквивалентными** при $x \to x_0$; при этом пишут $\alpha \sim \beta$ при $x \to x_0$ или $f \sim \varphi$ при $x \to x_0$.

Вычисление многих пределов значительно упрощается с использованием *теоремы об эквивалентных множителях.*

Теорема 9.1. Предел функции не изменится, если её множители или делители заменить на эквивалентные.

Поэтому для практики вычисления пределов необходимо уметь находить эквивалентные величины. Пользуясь специальными пределами 1,3,4,5, следствиями из них и определением эквивалентности, легко можно получить следующий **список (таблицу) эквивалентных бесконечно малых при** $z \to 0$:

$\sin z \sim z$; $\quad$ $\operatorname{tg} z \sim z$; $\quad$ $1 - \cos z \sim z^2/2$; $\quad$ $\arcsin z \sim z$;

$\operatorname{arctg} z \sim z$; $\quad$ $\ln(1+z) \sim z$; $\quad$ $\log_a(1+z) \sim \frac{z}{\ln a}$; $\quad$ $a^z - 1 \sim z \ln a$;

$e^z - 1 \sim z$; $(1+z)^p - 1 \sim pz$.

Величины, **эквивалентные бесконечно большим**, получают, **сохраняя** в них лишь **слагаемые наивысшего порядка роста**, т.е. пренебрегая конечным числом слагаемых более низкого порядка роста.

Например: при $x \to \infty$; $3x^2 + 100x + 4 \sim 3x^2$, а также $3x^2 + \sin x \sim 3x^2$;

Приведем **несколько примеров** вычисления пределов с использованием эквивалентных множителей:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}^2 5x}{\sin 2x \cdot \arcsin 3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^2 \cdot x^2}{2x \cdot 3x} = \dfrac{25}{6}$;

2. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{2x})}{e^{-x} - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}}{-x} = -\sqrt{2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2^x - 2) \cdot \ln(1+x)}{\sqrt[7]{x} - 1} = \left(\dfrac{0 \cdot \ln 2}{0}\right) = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2 \cdot (2^{x-1} - 1) \cdot \ln(1+x)}{(1 + (x-1))^{1/7} - 1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2 \cdot (x-1) \cdot \ln 2 \cdot \ln(1+x)}{(x-1) \cdot 1/7} = 14 \ln^2 2$. Здесь множитель $\ln(1+x)$, не стремящийся к нулю, не надо путать с БМ из таблицы.

Рассмотренный метод замены множителей на эквивалентные имеет тот недостаток, что он применим только к произведениям и отношениям функций, но не работает в случае сумм и разностей.