8.1. Предел функции одной переменной

Предел–фундаментальное понятие, на котором базируются другие основные понятия математического анализа: непрерывность, производная, интеграл. Сформулируем определения различных предельных ситуаций функции $f(x)$, приведем основные свойства пределов и рассмотрим различные методы непосредственного вычисления пределов с использованием этих свойств.

8.1.1. Понятие предела, его единственность, связь с односторонними пределами и с ограниченностью функции

Условимся называть $\delta -$**окрестностью конечной точки** x_0 и обозначать $U(x_0, \delta)$ множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, т.е. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, но $x \neq x_0$. При этом множество $U(x_0 - 0, \delta)$, т.е. $x_0 - \delta < x < x_0$ будем называть **левосторонней** $\delta -$**окрестностью точки** x_0, а $U(x_0 + 0, \delta)$, т.е. $x_0 < x < x_0 + \delta -$ **правосторонней** $\delta -$**окрестностью точки** x_0.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X и точка x_0 такая, что $U(x_0) \bigcap X \neq \varnothing$. Тогда:

Определение 1 . Число A называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** x_0 (или при x, стремящемся к x_0), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in U(x_0, \delta) \bigcap X$, т.е. удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta_{(\varepsilon)}$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

При этом обозначают предел функции символом $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Используя логические символы, определение 1 можно записать в виде:

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left((\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

Определение 2. Функция $f(x)$ **в точке** x_0 **имеет бесконечный**

предел, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, в таком случае функция $f(x)$ называется **бесконечно большой (ББ) при** $x \to x_0$.

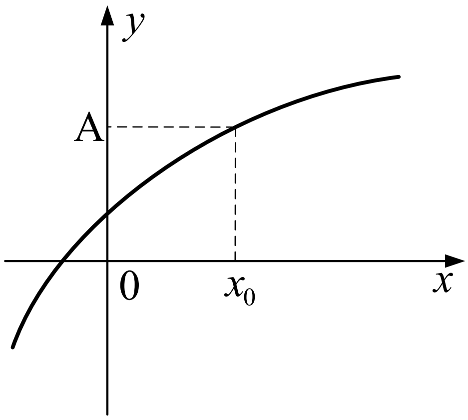

Рис. 8.1

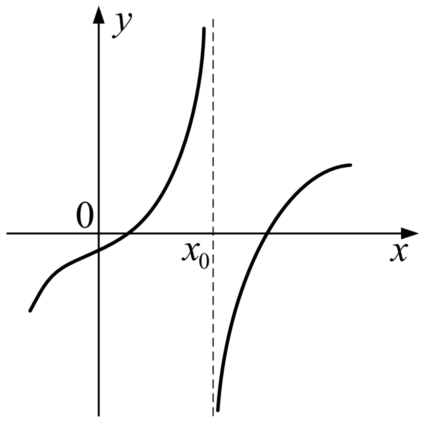

Рис. 8.2

Теорема 8.1. *О единственности конечного предела функции*

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечный предел, то он единственный.

Доказательство. Предположим противное, т.е., что $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq B = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, где $A \neq \infty$, $B \neq \infty$. Тогда по определению 1 предела функции: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta_1) : |f(x) - A| < \varepsilon$ и $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta_2) : |f(x) - B| < \varepsilon$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ есть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ такое, что для всех $x \in X$, $0 < |x - x_0| < \delta$ должны выполняться оба неравенства: $|f(x) - A| < \varepsilon$ и $|f(x) - B| < \varepsilon$, т.е. значение $f(x)$ должно находиться одновременно и в $\varepsilon -$ окрестности точки A и в $\varepsilon -$окрестности точки B, что невозможно уже при радиусе окрестности (ε), меньшем полурасстояния между точками A и B, т.е. при $0 < \varepsilon < \dfrac{|B - A|}{2}$. Это противоречие показывает, что сделанное предположение $A \neq B$ неверно, т.е. $A = B$. Теорема доказана.

В дальнейшем будут использованы понятия односторонних пределов функции, которые определяются следующим образом.

Определение. Значение **П** называется правосторонним (Λ– левосторонним) пределом функции ($f(x)$ в точке $x_0 \neq \infty$, если для любой окрестности $U(\Pi)$ $\left(U(\Lambda)\right)$ существует правосторонняя окрестность $U(x_0+0)$ (левосторонняя $U(x_0-0)$) такая, что для всех $x \in U(x_0+0) \bigcap X$ $\left(x \in U(x_0-0) \bigcap X\right)$ выполняется условие $f(x) \in U(\Pi)$ $\left(f(x) \in U(\Lambda)\right)$. При этом пишут:

$$\Pi = f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) \text{ и } \Lambda = f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Теорема 8.2. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, **имеет** в точке x_0, для которой $U(x_0) \bigcap X \neq \varnothing$, предел тогда и только тогда, когда в этой точке **существуют** как **правосторонний**, так и **левосторонний** пределы, и они равны, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0-0} f(x) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = A.$$

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной при $x \to x_0$, если существует такая окрестность $U(x_0)$ этой точки, в которой $f(x)$ ограничена.

Теорема 8.3. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0, то она ограничена в окрестности точки x_0.

Доказательство. Так как $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq \infty$, то по определению предела: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists U(x_0))\left(\forall x \in U(x_0) \bigcap X\right): \left|f(x) - A\right| < \varepsilon.$

Но $\left|f(x)\right| - \left|A\right| \leq \left|f(x) - A\right| \Rightarrow \left|f(x)\right| - \left|A\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|f(x)\right| < \left|A\right| + \varepsilon = M$, т.е. для $\forall x \in U(x_0) \bigcap X$ выполняется условие $\left|f(x)\right| < M \Rightarrow f(x)$ – ограничена в окрестности точки x_0.

Теорема 8.4. Если при $x \to x_0$ функция $f(x)$ имеет предел, отличный от нуля, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ ограничена в окрестности точки x_0.

8.2.2. Теоремы о бесконечно малых

Определение. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется **бесконечно малой (БМ)** при $x \to x_0$ (в точке x_0, для которой $U(x_0) \bigcap X \neq \varnothing$), если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, т.е. $(\forall\varepsilon>0)(\exists U(x_0))(\forall x\in U(x_0)\cap X):\ |f(x)|<\varepsilon$.

Следует особо подчеркнуть, что понятия БМ и ББ – это понятия локальные (о поведении функции при $x\to x_0$), поэтому они не могут быть применены к функции безотносительно некоторой фиксированной точки x_0.

Теорема 8.5. *Основная теорема о бесконечно малых*

Для существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq\infty$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x)=f(x)-A$ была бесконечно малой при $x\to x_0$.

Теорема 8.6. ***О связи бесконечно малых и бесконечно больших***

Если при $x\to x_0$ функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая при $x\to x_0$. Верно и обратное утверждение.

Теорема 8.7. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x\to x_0$, а также произведение бесконечно малой в точке x_0 на ограниченную функцию при $x\to x_0$ являются бесконечно малыми функциями при $x\to x_0$.

8.2.3. Теоремы о пределах

При вычислении пределов используют основные свойства пределов, некоторые из которых изложены в следующей теореме.

Теорема 8.8. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $B\neq 0$) имеют в точке x_0 пределы, равные соответственно $A\pm B$, $A\cdot B$ и $\dfrac{A}{B}$.

Приведем **доказательство** последнего утверждения (остальные доказываются аналогично).

В силу теоремы 7.5: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B \Leftrightarrow g(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – беконечно малые при

$x \to x_0$, $B \neq 0$ по условию теоремы. Тогда в окрестности точки x_0

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B}\right) + \frac{A}{B} = \frac{A}{B} + \frac{AB + B\alpha(x) - AB - A\beta(x)}{B(B+\beta(x))} =$$

$= \dfrac{A}{B} + \dfrac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B^2 + B\beta(x)}$, т.е. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} + \gamma(x)$. Согласно теореме 1.7 величины $B\alpha(x)$, $A\beta(x)$, $B\alpha(x) - A\beta(x)$, $B\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to x_0$. Тогда $B^2 + B\beta(x)$–ограниченная функция при $x \to x_0$, $\gamma(x) = \dfrac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B^2 + B\beta(x)}$ –БМ при $x \to x_0$. Следовательно, число $\dfrac{A}{B}$ является пределом функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$. Утверждение доказано.

Приведем три теоремы о предельном переходе в неравенствах.

Теорема 8.9. Если в окрестности точки x_0 определены функции $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$, связанные неравенством $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Теорема 8.10. Если неотрицательная в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq 0$.

Теорема 8.11. Если в окрестности точки x_0 функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ связаны неравенством $f(x) \geq \varphi(x)$ и существуют пределы: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$, то $A \geq B$.

8.3. Непрерывность функции одной переменной

8.3.1. Понятие непрерывности

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, содержащем точку x_0 и некоторую ее окрестность $U(x_0)$. Если x_0–начальное значение аргумента, а x –конечное его значение, то величина $\Delta x = x - x_0$ называется приращением аргумента в точке x_0. Тогда, если $x = x_0 + \Delta x \in X$, то

приращением функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению Δx аргумента x, называют разность $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$.

Определение 1. Функция $f(x)$, определенная в точке x_0 и в ее окрестности, называется **непрерывной в точке** x_0, если бесконечно малому приращению Δx аргумента x в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции Δf, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она определена в этой точке и в некоторой ее окрестности и значение функции в точке x_0 совпадает со значением предела в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$, определенная в интервале $(a;\ b)$, называется **непрерывной в** этом **интервале**, если она непрерывна в каждой его точке.
Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** $\boldsymbol{x_0}$ **справа (слева)**, если она определена в точке x_0 и некоторой ее правосторонней (левосторонней) окрестности и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)\right)$.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a;\ b]$, если она непрерывна в интервале $(a;\ b)$ и непрерывна в точке a справа и в точке b – слева.

Приведем **пример** непосредственного исследования функции на непрерывность по определению:

1. $f(x) = x^2$ определена на всей числовой оси. Давая аргументу приращение Δx, рассмотрим приращение функции в любой точке x: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (2x + \Delta x)\Delta x$. Так как при любом фиксированном x и при $\Delta x \to 0$ множитель $2x + \Delta x$ – ограничен, а Δx – бесконечно мал, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left((2x + \Delta x)\Delta x\right) = 0$, т.е. функция $f(x) = x^2$ – всюду непрерывна.

Однако исследовать на непрерывность функцию удобнее пользуясь не определением непрерывности, а свойствами непрерывных функций и признаками непрерывности.

8.3.2. Свойства непрерывных функций

1. Из определения 2 в силу того, что $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, следует весьма важное для практики вычисления пределов свойство непрерывных функций.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$.

В непрерывных функциях можно переходить к пределу под знаком функции, т.е. подставлять в функцию предельное значение аргумента.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;\, b]$, то и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны на $[a;\, b]$ (последняя – всюду, где $g(x) \neq 0$).

Доказательство буквально следует из свойства 1 с учетом определения непрерывности функции на отрезке.

3. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(u))$ – непрерывна в точке $x = x_0$.

4. Все элементарные функции непрерывны во внутренних точках своей области определения.

5. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что для всех $x \in U(x_0)$ функция $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.

6. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет на концах отрезка значения разных знаков $\left(f(a) \cdot f(b) < 0\right)$, то существует по крайней мере одна точка $c \in (a;b)$, в которой $f(c) = 0$.

7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a) = A \neq f(b) = B$, то для любого числа C, заключенного между A и B, найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что $f(c) = C$.

Из 7 следует, что непрерывная функция $f : X \mapsto Y$ отображает промежуток X в промежуток Y.

8. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она ограниченная на $[a;b]$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и $x_0 \in [a;b]$. Тогда значение $f(x_0) = M$ (m) называется наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на $[a;b]$, если для любого $x \in [a;b]$ выполняется $f(x) \le M$ $\left(f(x) \ge m\right)$.

9. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, достигает на $[a;b]$ своих наибольшего M и наименьшего m значений хотя бы один раз и принимает на $[a;b]$ любое промежуточное значение, лежащее между m и M.

10. Если функция $f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на некотором промежутке X и промежуток $Y -$множество ее значений, то на промежутке Y обратная функция $f^{-1}(y)$ однозначна, монотонна и непрерывна.

8.3.3.Признаки непрерывности. Классификация точек разрыва

При исследовании функции на непрерывность, руководствуясь тем, что функция уже непрерывна в интервалах, в которых она элементарна, исследуют функцию лишь в отдельных **точках**, так называемых "**подозрительных на разрыв**". Таковыми часто являются корни знаменателей, точки, "выпадающие" из ООФ, точки "склеивания" разных аналитических зависимостей и др.

Из определения непрерывности и связи предела функции с односторонними пределами следует, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, если выполняются следующие условия (**признаки непрерывности)**:

$$\begin{cases} 1.\ \text{существует } f(x_0) \ne \infty; \\ 2.\ \text{существует } f(x) \text{ при } x \in \mathrm{U}(x_0); \\ 3.\ \text{существует } \Lambda = f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \ne \infty; \\ 4.\ \text{существует } \mathit{\Pi} = f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \ne \infty; \\ 5.\ \Lambda = \mathit{\Pi} = f(x_0). \end{cases}$$

Если хотя бы одно из условий 1-5 не выполняется, то функция $f(x)$ называется разрывной в точке x_0, или говорят, что функция $f(x)$ имеет **разрыв в точке** x_0. При этом разрывы классифицируются следующим образом:

1. Разрыв в точке x_0 называют **устранимым разрывом 1-го рода**, если $\Lambda = \Pi \neq f(x_0)$, причем $\Lambda, \Pi \neq \infty$ (см. рис. 8.3).

2. В точке x_0 **разрыв** будет **неустранимый 1-го рода**, если $\Lambda \neq \Pi$, но $\Lambda, \Pi \neq \infty$ (см. рис. 8.4).

3. Если хотя бы один из односторонних пределов (Λ, Π) равен бесконечности или вообще не существует, то **разрыв** в точке x_0 называется разрывом **2-го рода** (см. рис. 8.5).

В случае разрыва разность $\sigma = \Pi - \Lambda$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0.

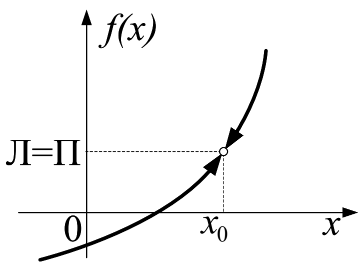

Рис. 8.3

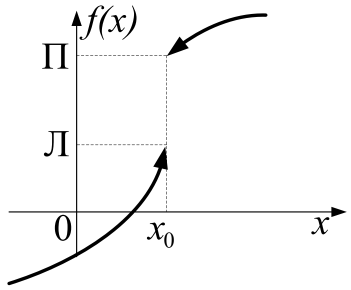

Рис. 8.4

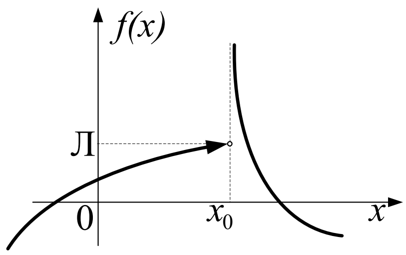

Рис. 8.5

Приведем **несколько примеров исследования функции** на непрерывность указанным методом и построения ее схематического графика.

1. $y = x - \dfrac{x+2}{|x+2|}$. С учетом определения модуля и ООФ: $x \neq 2$, запишем функцию в виде $y = \begin{cases} x+1 & \text{при } x < -2, \\ x-1 & \text{при } x > -2 \end{cases}$. Функция $y(x)$, как элементарная, всюду в ООФ непрерывна. Поэтому исследуем только точку $x_0 = -2$, в которой $y(x_0)$ – неопределена.

$\Lambda = \lim\limits_{x \to -2\text{-}0} y(x) = \lim\limits_{x \to -2-0} (x+1) = -1;$ $\Pi = \lim\limits_{x \to -2+0} (x-1) = -3.$ Так как пределы конечны, но $-1 \neq -3$, то в точке $x_0 = -2$ функция $y = x - \dfrac{x+2}{|x+2|}$ имеет неустранимый разрыв 1-го рода со скачком $\sigma = \Pi - \Lambda = -2$ (см. рис. 8.6).

2. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$ –функция, как элементарная, всюду непрерывна, кроме точки $x_0 = 2$, $y(2)$ – не существует;

$\Lambda = \lim\limits_{x \to 2-0} 2^{1/(x-2)} = 2^{1/(2-0-2)} = 2^{\left(\frac{1}{-0}\right)} = 2^{-\infty} = 0.$

$\Pi = \lim\limits_{x \to 2+0} 2^{\frac{1}{x-2}} = 2^{\frac{1}{2+0-2}} = 2^{\left(\frac{1}{+0}\right)} = 2^{+\infty} + \infty, \Rightarrow$ в точке $x_0 = 2$ разрыв второго рода. Кроме того, для построения графика функции полезно заметить, что $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{\frac{1}{x-2}} = 2^0 = 1$ (см. рис.8.7).

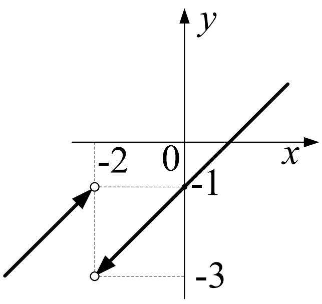

Рис. 8.6

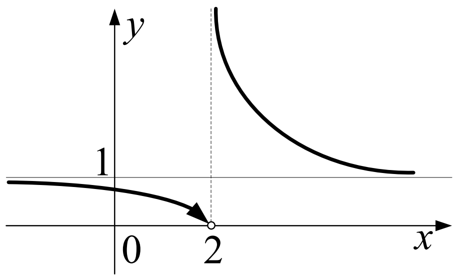

Рис.8.7