ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

7.1. Понятие функции

Важнейшим понятием математического анализа является понятие функции.

7.1.1. Определение функции

Пусть X и $Y-$некоторые числовые множества.

Функцией называется множество f упорядоченных пар чисел $(x;y)$ таких, что $x\in X$, $y\in Y$, и каждое x входит в одну и только одну пару этого множества, а каждое y входит, по крайней мере, в одну пару. При этом говорят, что числу x поставлено в соответствие число y, и пишут $y=f(x)$. Число y является значением функции f в точке x. Переменную y называют зависимой переменной (функцией), а переменную $x-$ независимой переменной (аргументом), множество $X-$ областью определения (существования) функции (ООФ), а множество $Y-$множеством значений функции (МЗФ). Эти множества часто обозначают соответственно $D(f)$ и $E(f)$.

Функция, все значения которой равны между собой, называется **постоянной** и обозначается $y=C$ или $f(x)=C$, где $C=const.$

Если областью определения функции является множество N натуральных чисел, то такую функцию называют **числовой последовательностью** и обозначают $x_n=x(n)$ или $\{x_n\}$, где $n\in N$. При этом выражение x_n называется общим членом последовательности, а $n-$его номером.

Например, $\{x_n\}=\{(-2)^n+n\}$ или $\{y_n\}=\{n!\}=\{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\}$, где $n\in N$.

Из определения функции следует, что мы рассматриваем только **однозначные функции**, т.е. каждому $x\in X$ соответствует единственное $y\in Y$.

Графиком $\Gamma(f)$ функции $y=f(x)$ называется геометрическое место точек (x,y) на плоскости (в некоторой выбранной системе координат xOy), координаты которых связаны соотношением $y=f(x)$, называемым уравнением графика.

Если на некотором множестве X определена функция $z = \varphi(x)$ с множеством значений Z, а на множестве Z определена функция $y = f(z)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ называется **сложной функцией от x (суперпозицией** или **композицией функций)**, а переменная z – промежуточной переменной сложной функции.

Например, если $y = f(z) = \cos z$, а $z = \varphi(x) = x^3$, то $y = f(\varphi(x)) = \cos x^3$ и $z = \varphi(f(x)) = \cos^3 x$ – две разные сложные функции, определенные на всей числовой прямой.

7.1.2. Способы задания функций

Задать функцию f –значит указать, как по каждому значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции $f(x)$. Существует три основных способа задания функций: **аналитический**, **табличный** и **графический**.

При **аналитическом способе** задания функции зависимость f между переменными величинами определяется с помощью формулы, указывающей, какие действия нужно выполнить, чтобы получить значение функции, соответствующее данному значению аргумента.

Например: $y = \sqrt{4 - x^2}$, где $x \in X = [-2;2]$, $y \in Y = [0;2]$;

Аналитический способ задания функций является самым компактным и удобным для проведения математических выкладок, исследования функций, поэтому в математике именно им в основном и пользуются.

Табличный способ задания функции – это таблица соответствия числовых значений y определенным значениям аргумента x. Примерами табличного способа задания функций могут служить всем хорошо известные таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов, таблицы квадратов, кубов, обратных чисел и т.д., а также всевозможные таблицы технических характеристик процессов, статистические и хронологические таблицы, расписания и пр.

При **графическом способе** функция $y = f(x)$, (соответствие между значениями x и y) на ограниченном множестве X задается графиком $\Gamma(f)$

в системе координат xOy, графический способ задания функции обычно используют в практике физических и технических измерений.

7.1.3. Классификация функций

Постоянная функция $f(x) = C = const$, степенная функция x^{α} (α – любое число), показательная функция a^x $(0 < a \neq 1)$, логарифмическая функция $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ и обратные тригонометрические функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$ называются **простейшими элементарными функциями**.

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также суперпозицией (или наложением) этих функций, составляют **класс элементарных функций**.

Элементарные функции классифицируются следующим образом

1. ***Целой рациональной функцией*** **или** ***алгебраическим многочленом степени*** n называется функция вида

$$P_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n,$$

где n**-** неотрицательное целое число; $p_0, p_1, \ldots, p_n$ –любые числа— коэффициенты многочлена $(p_0 \neq 0)$.

В частности, при $n = 1$ и при $n = 2$ получаем соответственно линейную и квадратическую функции.

2. ***Дробно-рациональной функцией*** называется отношение двух алгебраических многочленов $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс **рациональных функций.**

3. ***Иррациональной функцией*** называется функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями, и не являющаяся рациональной.

4 ***Трансцендентной функцией*** называется функция, не являющаяся рациональной или иррациональной.

7.1.4. Некоторые свойства функций

1.*Четность*. Функция $f(x)$, определенная на симметричном множестве X, является **четной**, если $f(-x)=f(x)$, и–**нечетной**, если $f(-x)=-f(x)$. Если функция не является ни четной, ни нечетной, то ее называют функцией **общего типа**.

Например, $f(x)=x\sin x+|x|-1$ - четная, т.к. $f(-x)=-x\sin(-x)+|-x|-1=x\sin x+|x|-1=f(x)$;

Из определения четности (нечетности) следует, что график четной функции $y=f(x)$ симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции $y=f(x)$ симметричен относительно начала координат.

2. *Периодичность.* Функция $f(x)$ называется **периодической** на множестве X, если существует такое число $T=const\neq 0$, что для любого $x\in X$ выполняется $f(x+T)=f(x)$. При этом наименьшее по абсолютной величине из таких чисел T называют ее **периодом**.

Например, исследуем на периодичность функцию: x^2;

Функция $f(x)=x^2$. Решая уравнение $f(x+T)=f(x)$, т.е. $(x+T)^2=x^2$ относительно T, имеем $x^2+2xT+T^2=x^2$; $T(2x+T)=0\Rightarrow$ $T_1=0$, $T_2=-2x$. Так как, согласно определению, ни T_1, ни T_2 не является периодом, то функция $f(x)=x^2$ $-$не периодическая во всей ООФ.

3. *Ограниченность*. Функция $y=f(x)$, определенная на некотором множестве X, называется **ограниченной** на этом множестве, если существует число $M>0$ такое, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $|f(x)|\leq M$ или $-M\leq f(x)\leq M$, т.е. график функции не выходит из полосы, ограниченной прямыми $y=M$ и $y=-M$.

Например, функция $y=\cos x$ ограничена во всей своей области определения, так как $|\cos x|\leq 1$ при любом $x\in(-\infty;+\infty)$,

4. *Монотонность.* Говорят, что функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на множестве X, если для любых $x_1,x_2\in X$, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)\leq f(x_2)$ $\left(f(x_1)\geq f(x_2)\right)$.

Неубывающие или невозрастающие функции называются **монотонными функциями.**

Если для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$, то функция $f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на множестве X. Такие функции называют **строго монотонными**.

7.1.5. Обратная функция и функция, заданная параметрически

Пусть на множестве X задана строго монотонная функция
$f : X \mapsto Y$, т.е. множество пар чисел $(x; y)$ $(x \in X,\ y \in Y)$, в котором каждое число x и каждое y входит в одну и только одну пару. Если в каждой паре этого множества числа x и y поменять местами, то получим множество пар чисел $(y; x)$, которое называется **обратной функцией** f^{-1} к функции f.

Из определения обратной функции очевидно, что графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны друг другу относительно биссектрисы I, III координатных углов, т.е. относительно прямой $y = x$.

Если связь между переменными x и y, т.е. соответствие между их значениями устанавливается не непосредственно, а посредством некоторой третьей независимой переменной t (параметра), то говорят о параметрическом задании функциональной зависимости между x и y.
Однозначная **функция** $y = f(x)$ **задана параметрически** на множестве X, если $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, где $t \in T$, при этом функция $x(t)$ строго монотонна на T и $x(t) : T \mapsto X$.

Примерами параметрического задания функции $y = f(x)$ могут служить записи: $\begin{cases} y = \sin t + \cos t \\ x = t + e^t \end{cases}$, $t \in (-\infty; +\infty)$ или $\begin{cases} y = t^2 \ln(t + 2) \\ x = \sqrt{1 - t} \end{cases}$, $t \in (-2; 1]$ и др.