Системы случайных величин

На практике, как правило, сталкиваются не с одной СВ, а с несколькими, описывающими состояние изучаемого объекта. Например, экономическую ситуацию на предприятии за определенный период времени можно описывать при помощи следующих СВ: государственное финансирование, частное финансирование, ресурсы и производственные мощности, объем произведенной продукции, объем реализованной продукции. При этом важны, разумеется, не только индивидуальные числовые характеристики перечисленных СВ, но и взаимосвязи между ними.

Пусть имеем вероятностное пространство (Ω, F, P), с заданными на нем случайными величинами $X_1 = X_1(\omega), X_2 = X_2(\omega), ..., X_n = X_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Определение 43.1. Случайную величину $X(\omega) = (X_1, X_2, ..., X_n)$ назовем ***системой*** n ***случайных величин*** (n – ***мерным случайным вектором***).

Для простоты ниже мы ограничиваемся рассмотрением случая двумерного случайного вектора (X, Y).

Рассматривая систему СВ (X, Y), мы будем предполагать, что СВ X и Y либо обе дискретны, либо обе непрерывны, хотя, разумеется смешанные ситуации также возможны. Исследование таких случаев ничего принципиально нового не содержит.

Для любого множества из класса F определена функция распределения $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$. Она однозначно определяет закон распределения вероятностей случайного вектора и обладает свойствами, вполне аналогичными свойствам функции распределения одной переменной, а именно:

1. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$.
2. $F_X(x) = F(x, +\infty)$, $F_Y(y) = F(+\infty, y)$, где $F_X(x)$, $F_Y(y)$ – индивидуальные функции распределения СВ X и Y.

Следствие. $F(+\infty, +\infty) = 1$.

3. Совместная функция распределения есть неубывающая функция каждого из своих аргументов.
4. Вероятность попадания значений, принимаемых системой СВ, в прямоугольник может быть найдена по формуле

$$P(\alpha \le X < \beta,\ \gamma \le Y < \delta) = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma).$$

Системы двух дискретных случайных величин

Пусть СВ X и Y дискретны и $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots$; $y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots$ – принимаемые ими значения соответственно. Обозначим через p_{ij} следующие вероятности:

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i = 1, 2, \ldots; \; j = 1, 2, \ldots \; .$$

Тогда всю информацию о системе СВ (X, Y) можно разместить в следующую таблицу, называемую ***совместным законом распределения системы СВ*** (X, Y):

X/Y	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2j}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots.$	$\ldots$

Замечание. Как и в случае одной СВ, по совместному закону распределения легко строится совместная функция распределения и наоборот.

Определение 43.2. Назовем СВ, составляющие систему, ***независимыми***, если при любых i, j события $(X = x_i)$ и $(Y = y_j)$ независимы.

По теореме умножения для независимых событий

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j).$$

Изучение систем, составленных из независимых СВ, очевидно, сводится к изучению каждой из них в отдельности.

Свойства совместного закона распределения

Пусть система двух ДСВ задана совместным законом распределения, тогда:

1. $p_{ij} \geq 0$.
2. $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1$.
3. $P(X = x_i) = \sum\limits_{j} p_{ij}, \;\; P(Y = y_j) = \sum\limits_{i} p_{ij}$.

Следствие. По совместному закону распределения могут быть построены индивидуальные законы распределения СВ X и Y. Именно для построения закона распределения СВ $X(Y)$ следует выписать значения, принимаемые СВ $X(Y)$ из совместного закона распределения, а для получения вероятностей принятия каждого из значений следует сложить вероятности из соответствующей строки (столбца) совместного закона распределения. Таким образом, по совместному закону распределения могут быть найдены индивидуальные числовые характеристики СВ X и Y (математические ожидания, дисперсии, средние квадратические отклонения) и функции распределения.

Условные распределения. Условные числовые характеристики

Здесь мы введем СВ и их характеристики, по которым можно судить о влиянии одной из составляющих системы СВ на другую.

Определение 43.3. Назовем ***случайную величину*** $(X / Y = y_j)$ ***условной***, если рассматривается СВ X при условии, что СВ Y принимает значение y_j. Ясно, что таких СВ столько, сколько значений принимает СВ Y. Поведение СВ $(X / Y = y_j)$ характеризует, в некотором смысле, зависимости между составляющими системы. Аналогичный смысл имеет семейство СВ $(Y / X = x_i)$.

Для определенности будем рассматривать СВ $(X / Y = y_j)$.

Определение 43.4. Назовем ***условным законом распределения*** закон распределения этой СВ, условной функцией распределения – функцию распределения этой СВ. Аналогичный смысл имеют термины: условное математическое ожидание, условная дисперсия, условное среднее квадратическое отклонение, условные моменты.

Ясно, что для нахождения всех перечисленных условных характеристик достаточно уметь строить условный закон распределения.

Предположим, что система СВ задана совместным законом распределения. По определению условной вероятности имеем:

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}}, \quad i = 1, 2, \ldots; \, j = 1, 2, \ldots \, .$$

Таким образом, условный закон распределения имеет вид:

$(X / Y = y_j)$	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$
P	$\frac{p_{1j}}{\sum\limits_i p_{ij}}$	$\frac{p_{2j}}{\sum\limits_i p_{ij}}$	$\ldots$	$\frac{p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}}$	$\ldots$

.

Но тогда условные числовые характеристики могут быть найдены следующим образом:

$$M(X / Y = y_j) = \frac{\sum\limits_i x_i p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}}, \quad D(X / Y = y_j) = \frac{\sum\limits_i (x_i - a_i)^2 p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}}, \quad a_j = M(X / Y = y_j).$$

Аналогичным образом, может быть построен условный закон распределения СВ $(Y / X = x_i)$ и найдены условные числовые характеристики этой СВ.

Ковариация. Коэффициент корреляции

Определение 43.5. ***Ковариацией*** СВ X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих СВ от своих математических ожиданий:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M\left((X-a)(Y-b)\right),\ a=M(X),\ b=M(Y).$$

Свойства ковариации

1. Если СВ X и Y независимы, то их ковариация равна нулю.

Замечание. Утверждение, обратное к свойству 1, вообще говоря, несправедливо.

Определение 43.6. ***СВ*** X ***и*** Y называют ***некоррелированными***, если $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что если СВ независимы, то они являются некоррелированными, обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

2. Ковариация симметрична относительно своих аргументов

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X).$$

3. Ковариация линейна по каждому из своих аргументов:

$$\operatorname{cov}(\alpha X+\beta Y,\ Z)=\alpha\operatorname{cov}(X,Z)+\beta\operatorname{cov}(Y,Z),$$

$$\operatorname{cov}(X,\ \alpha Y+\beta Z)=\alpha\operatorname{cov}(X,Y)+\beta\operatorname{cov}(X,Z).$$

4. Ковариация есть математическое ожидание произведения СВ без произведения их математических ожиданий

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-M(X)\cdot M(Y).$$

5. Дисперсия СВ есть ее ковариация с собой: $D(X)=\operatorname{cov}(X,X)$.

6. Дисперсия алгебраической суммы СВ может быть найдена по формуле

$$D(X\pm Y)=D(X)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)+D(Y).$$

7. Абсолютная величина ковариации СВ не превосходит произведения средних квадратических отклонений этих СВ

$$\left|\operatorname{cov}(X,Y)\right|\le\sigma(X)\cdot\sigma(Y).$$

8. СВ X и Y связаны линейной зависимостью тогда и только тогда, когда $\left|\operatorname{cov}(X,Y)\right|=\sigma(X)\cdot\sigma(Y)$.

Замечание. Из свойств ковариации вытекает, что при ее помощи можно оценить насколько далека зависимость между рассматриваемыми СВ от линейной. На практике оказалось более удобным использовать при этом не саму ковариацию, а связанную с ней относительную числовую характеристику, называемую коэффициентом корреляции.

Определение 43.7. ***Коэффициентом корреляции СВ*** X ***и*** Y называют отношение их ковариации к произведению средних квадратических отклонений

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}.$$

Все свойства коэффициента корреляции легко вытекают из соответствующих свойств ковариации, поэтому мы ограничимся лишь их формулировкой:

1. Коэффициент корреляции симметричен относительно своих аргументов $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$.

2. Коэффициент корреляции "почти однороден" по каждому из своих аргументов $\rho(\alpha X,Y)=sign\alpha\cdot\rho(X,Y)$, $\rho(X,\beta Y)=sign\beta\cdot\rho(X,Y)$, где $sign\,x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

3. Если СВ X и Y независимы, то $\rho(X,Y)=0$. Обратное утверждение неверно.

4. Коэффициент корреляции принимает значения на отрезке $[-1,1]$.

5. СВ X и Y связаны линейной зависимостью тогда и только тогда, когда $\rho(X,Y)=\pm 1$.

Системы непрерывных СВ

Определение 43.9. Будем говорить, что ***система СВ*** (X,Y) ***непрерывна***, если непрерывна совместная функция распределения этой системы.

Поскольку из непрерывности функции двух переменных вытекает непрерывность функций одного переменного, полученных фиксированием одного из переменных, то в силу свойства 2 совместной функции распределения каждая из СВ, составляющих непрерывную систему – непрерывна.

Ниже будем считать, что совместная функция распределения имеет всевозможные непрерывные производные второго порядка.

Обозначим через $\Pi(\Delta x,\Delta y)$ следующее подмножество плоскости: $\prod(\Delta x,\Delta y)=\{[x,x+\Delta x)\times[y,y+\Delta y)\}$. Очевидно, $\Pi(\Delta x,\Delta y)$ есть прямоугольник со сторонами $\Delta x,\Delta y$.

Назовем ***средней совместной плотностью вероятности системы СВ*** по прямоугольнику $\Pi(\Delta x,\Delta y)$ отношение вероятности попадания значений, принимаемых системой, в прямоугольник к его площади

$$p_{cp}(x,y)=\frac{P((X,Y)\in\Pi(\Delta x,\Delta y))}{\Delta x\cdot\Delta y}.$$

Определение 43.10. ***Совместной плотностью системы*** в точке $(x,\ y)$ называют предел средней плотности при условии, что прямоугольник $\Pi(\Delta x,\Delta y)$ стягивается в точку $(x,\ y)$, т.е. при условии $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$. Таким образом, по определению $p(x,y)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P((X,Y)\in\Pi(\Delta x,\Delta y))}{\Delta x\cdot\Delta y}$.

Принимая во внимание формулу для вычисления вероятности $P((X,Y)\in\Pi(\Delta x,\Delta y))$, получим

$$p(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)}{\Delta x\cdot\Delta y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}.$$

Из определения и полученной формулы для совместной плотности распределения вытекают следующие ее свойства:

1. Совместная плотность неотрицательна $p(x,y) \ge 0$.

2. Совместная плотность распределения связана с совместной функцией распределения соотношениями

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(s,t)\, ds\, dt.$$

3. Вероятность попадания значений системы СВ в некоторую область D может быть найдена по формуле

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D p(x,y)\, dx\, dy.$$

Замечание. Из свойств совместной функции распределения и совместной плотности распределения легко вытекают следующие утверждения:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\, dx\, dy = 1.$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) dy = p_1(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) dx = p_2(y),$ где $p_1(x), \; p_2(y)$ – индивидуальные плотности распределения СВ X и Y соответственно.

Это, в частности, означает, что по совместной функции распределения или плотности распределения могут быть найдены числовые характеристики СВ X и Y.

Как и в случае системы дискретных СВ, для описания взаимосвязей между компонентами системы вводятся условные СВ, их числовые характеристики.

Назовем ***условной плотностью распределения СВ*** X при условии, что СВ Y приняла значение y функцию

$$p(x / y) = \frac{p(x,y)}{p_2(y)} = \frac{p(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\, dx}.$$