Непрерывные случайные величины

Пусть СВ X задается своей функцией распределения $F(x) = P(X < x)$, которая по определению непрерывной СВ является непрерывной функцией аргумента x.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма. Если СВ X непрерывна, то для любого $x_0 \in R$ вероятность принять это значение равна нулю: $P(X = x_0) = 0$.

Следствие. Если СВ X непрерывна, то:

$$P(X \in [\alpha, \beta)) = P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$
$$P(X \in (\alpha, \beta)) = P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$
$$P(X \in (\alpha, \beta]) = P(\alpha < X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$
$$P(X \in [\alpha, \beta]) = P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Плотность распределения. Вероятность попадания непрерывной случайной величины на интервал

Сформулированная в предыдущем пункте лемма показывает, что непрерывные случайные величины (НСВ) существенно отличаются от дискретных случайных величин (ДСВ). Для описания распределения вероятностей поступим следующим образом. Вместе с точкой x рассмотрим прилегающий к ней элементарный интервал числовой оси $(x, x+\Delta x)$ при $\Delta x > 0$ или $(x+\Delta x, x)$ при $\Delta x < 0$. Для определенности будем считать, что $\Delta x > 0$. Назовем ***средней плотностью вероятности*** по участку $[x,\ x+\Delta x)$ отношение вероятности попадания СВ на этот участок к его длине

$$p_{cp} = \frac{P(X \in [x,\ x+\Delta x))}{\Delta x}.$$

Принимая во внимание формулу для вычисления вероятности попадания на интервал, получим

$$p_{cp} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$

Определение. Мы будем говорить, что для НСВ X определена ***плотность распределения вероятностей*** в точке x, если существует предел средней плотности вероятности при неограниченном стягивании промежутка $[x,\ x+\Delta x)$ в точку x. Обозначают плотность распределения $p(x)$ или $f(x)$. Следовательно, по определению

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} p_{cp} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$

Из приведенных рассуждений вытекает, что для НСВ плотность определена тогда и только тогда, когда функция распределения имеет производную в соответствующей точке и при этом $p(x) = F'(x)$. Всюду ниже мы предполагаем, что плотность определена в каждой точке числовой оси.

Поскольку функция распределения является первообразной для плотности распределения, то $F(\beta) - F(\alpha)$ есть интеграл от плотности

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx.$$

В связи с этим формулам для вероятности попадания НСВ на интервал можно придать следующий вид:

$$P(X \in [\alpha, \beta)) = P(\alpha \le X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx,$$

$$P(X \in (\alpha, \beta)) = P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx,$$

$$P(X \in (\alpha, \beta]) = P(\alpha < X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx,$$

$$P(X \in [\alpha, \beta]) = P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx.$$

Замечание 1. Геометрически вероятность попадания на интервал можно трактовать как площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = \alpha,\ x = \beta,\ y = 0,\ y = p(x)$.

Замечание 2. В некоторых учебниках плотность вероятности называют дифференциальной функцией, а функцию распределения – интегральной функцией.

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения неотрицательна.

2. Плотность распределения связана с функцией распределения соотношениями:

$$p(x) = F'(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt.$$

3. Интеграл от плотности по всей оси сходится и при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

4. ***Вероятностный смысл плотности распределения***: вероятность того, что НСВ примет значение из промежутка $(x, x+\Delta x)$ приближенно равна $p(x)\Delta x$, т.е.

$$P(x < X < x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x) \approx p(x)\Delta x$$

(с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx).

Следствие. Непрерывная случайная величина может задаваться либо функцией распределения, либо плотностью распределения.

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Предположим, что НСВ задана плотностью распределения $p(x)$. Назовем ***математическим ожиданием*** этой случайной величины число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx.$$

В том случае, когда определяющий математическое ожидание интеграл сходится, говорят, что СВ имеет математическое ожидание, в противном случае – что у СВ нет математического ожидания.

Можно показать, что введенное математическое ожидание НСВ обладает такими же свойствами, как и математическое ожидание ДСВ.

Отметим, что все числовые характеристики (дисперсия, среднее квадратическое отклонение, моменты произвольных порядков) для ДСВ вводились при помощи математического ожидания. Аналогичным образом перечисленные числовые характеристики могут быть введены и в случае НСВ. Ясно, что они обладают свойствами соответствующих числовых характеристик ДСВ. Отметим, что из определения дисперсии вытекают формулы для вычисления дисперсии НСВ:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 p(x)\,dx, \quad a = M(X),$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx - (M(X))^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Некоторые стандартные распределения

1. Равномерное распределение

Мы будем говорить, что НСВ ***распределена равномерно*** на отрезке $\left[a, b\right]$, если плотность ее распределения постоянна на этом отрезке и рана нулю вне него

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0 \quad , & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Нахождение числовых характеристик представляет собой несложное упражнение в интегрировании:

$$M[X] = \frac{a+b}{2}, \quad D[X] = \frac{(a-b)^2}{12}, \quad \sigma[X] = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Замечание. Функция распределения для равномерного распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

2. Показательное распределение

НСВ называется распределенной по ***показательному закону***, если плотность распределения этой СВ имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$.

Числовые характеристики:

$$M\left[X\right] = \frac{1}{\lambda},\ D\left[X\right] = \frac{1}{\lambda^2},\ \sigma\left[X\right] = \frac{1}{\lambda}.$$

Найдем $F(x)$ случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону, при $x > 0$ имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}, \text{ т.е.}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{если } x\geq 0.\end{cases}$$

Замечание. Показательное распределение широко применяется в приложениях, в частности, в теории надежности.

3. Нормальное распределение

Среди законов распределения нормальный закон занимает особое место, ибо встречающиеся на практике НСВ либо сами распределены по нормальному (или близкому к нормальному) закону, либо распределены по законам, описываемым при помощи нормального. В связи с этим мы несколько подробнее остановимся на нормальном законе.

Мы будем говорить, что НСВ распределена по ***нормальному закону*** (по закону Гаусса) с параметрами a и σ, если плотность распределения этой СВ задается следующим образом

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a\in R$, $\sigma\in R$ и $\sigma>0$.

Пользуясь методами дифференциального исчисления нетрудно проверить, что график функции $p(x)$ имеет следующий вид:

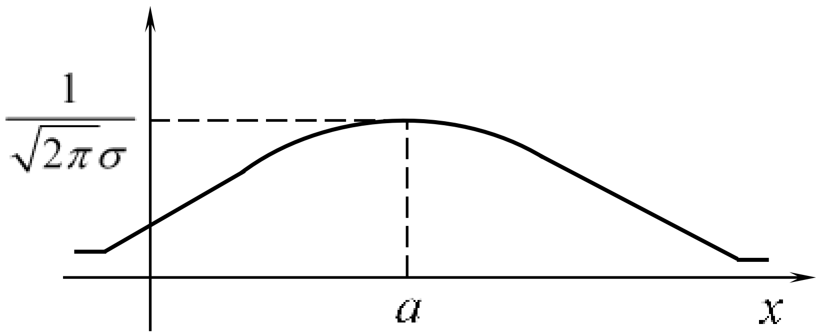

Рис. 42.1.

При нахождении числовых характеристик нормально распределенной СВ мы будем пользоваться следующими фактами из математического анализа:

1) Определенный интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен нулю.

2) Интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dt$ сходится и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.

Числовые характеристики нормального распределения:

$$M[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a$$

Аналогичным образом вычисляется дисперсия:

$$D[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 .$$

Вероятность попадания на интервал нормально распределенной СВ. Правило 3σ

Как и для всякой НСВ вероятность попадания на интервал в случае нормального распределения может быть найдена по формуле

$$P(X \in (\alpha, \beta)) = P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} p(x)dx .$$

Преобразуем эту формулу, учитывая явное выражение для плотности нормально распределенной СВ:

$$P(X \in (\alpha, \beta)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{x-a}{\sigma} = t, & x = a + \sigma t, & dx = \sigma\, dt, \\ \alpha \to \dfrac{\alpha - a}{\sigma}, & \beta \to & \dfrac{\beta - a}{\sigma} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где, как и ранее, через $\Phi_0(x)$ обозначена следующая стандартная функция

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Таким образом, для нормально распределенной СВ окончательно получаем

$$P(X \in (\alpha, \beta)) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

В частности,

$$P(X \in (a - 3\sigma, a + 3\sigma)) = \Phi_0(3) - \Phi_0(-3) = 2\Phi_0(3) \approx 2 \cdot 0{,}499 = 0{,}998\,.$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение, называемое ***правилом 3σ***: практически наверняка (с вероятностью 0,998) нормально распределенная СВ принимает свои значения на интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.